

## PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLI.

I. *Ueber die Grundgleichungen  
der Electrodynamik für bewegte Körper;  
von H. Hertz.*

Eine Darstellung der electrodynamischen Vorgänge in ruhenden Körpern, welche ich vor kurzem veröffentlichte<sup>1)</sup>, fiel dem Inhalte nach zusammen mit der Theorie Maxwell's, genügte aber in Hinsicht der Form grösseren Ansprüchen an systematische Ordnung. Von vornherein und mit Strenge war die Anschauung zur Geltung gebracht, dass electriche und magnetische Kräfte in jedem Punkte ihrer Wirksamkeit besonderen Zuständen des daselbst befindlichen raumerfüllenden Mittels entsprechen und dass die Ursachen, welche das Zustandekommen und die Aenderungen dieser Zustände bedingen, unter Ausschluss jeder Fernwirkung lediglich in den Verhältnissen der unmittelbaren Nachbarschaft zu suchen seien. Es war weiter vorausgesetzt worden, dass der electriche und magnetische Zustand des raumerfüllenden Mittels für jeden Punkt vollständig bestimmt sei durch je eine einzige Richtungsgrösse und es hatte sich gezeigt, dass die Beschränkung, welche in dieser Voraussetzung liegt, nur minder bedeutungsvolle Erscheinungen von der Betrachtung ausschloss. Die Einführung von Potentialen in die Grundgleichungen war vermieden.

Es tritt nun die Frage auf, ob unter strenger Festhaltung an den gleichen Anschauungen und an den gleichen Beschränkungen die Theorie so erweitert werden könne, dass sie auch den Ablauf der electrodynamischen Erscheinungen

1) H. Hertz, Wied. Ann. 40. p. 577. 1890.

in bewegten Körpern umfasst. Wir beachten zunächst, dass wenn von bewegten Körpern schlechthin die Rede ist, wir stets nur an die Bewegung der ponderablen Materie denken. Die gleichzeitig eintretenden Bewegungen des Aethers aber können nach unserer Anschauung nicht ohne Einfluss sein und von diesen haben wir keine Kenntniss. Damit ist schon gesagt, dass ohne die Einführung willkürlicher Annahmen über die Bewegung des Aethers die aufgeworfene Frage zur Zeit überhaupt nicht behandelt werden könne. Es lassen uns ferner die wenigen vorliegenden Andeutungen über die Bewegung des Aethers vermuthen, dass die gestellte Frage, streng genommen, zu verneinen sei. Es scheint nämlich aus den vorhandenen Andeutungen hervorzugehen, dass der Aether auch im Inneren der greifbaren Materie sich unabhängig von dieser bewege; diese Vorstellung ist sogar kaum zu umgehen angesichts der Thatsache, dass wir aus keinem umschlossenen Raume den Aether entfernen können. Wollen wir nun dieser Vorstellung unsere Theorie anpassen, so haben wir in jedem Punkte des Raumes die electromagnetischen Zustände des Aethers und der greifbaren Materie in gewissem Sinne als unabhängig zu betrachten. Die electromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern gehören alsdann zur Classe derjenigen, welche sich nicht bewältigen lassen, ohne die Einführung mindestens je zweier Richtungsgrößen für den electrischen und den magnetischen Zustand.

Anders liegt die Sache, wenn wir uns ausgesprochenermaassen begnügen, die eigentlichen electromagnetischen Erscheinungen in dem Umfange darzustellen, in welchem dieselben bisher mit Sicherheit untersucht worden sind. Wir dürfen behaupten, dass unter den so eingeschränkten Erscheinungen sich keine findet, welche uns zwingt, eine von der ponderablen Materie unabhängige Bewegung des Aethers im Inneren derselben zuzugeben; es geht dies schon aus dem Umstande hervor, dass aus dieser Classe von Erscheinungen ein Anhalt über die Grösse der gegenseitigen Verschiebung nicht gewonnen wird. Wenigstens die eigentlichen electrischen und magnetischen Erscheinungen müssen sich also vertragen mit der Vorstellung, dass eine solche Verschiebung überhaupt nicht stattfindet, dass vielmehr der hypo-



thetisch im Inneren der ponderabeln Materie vorausgesetzte Aether sich nur zugleich mit dieser bewege. Diese Vorstellung schliesst die Möglichkeit ein, in jedem Punkte des Raumes nur die Zustände eines einzigen raumerfüllenden Mittels in Betracht zu ziehen, sie gestattet hierdurch, die aufgeworfene Frage zu bejahen. Wir adoptiren sie für die vorliegende Abhandlung. Die auf solcher Grundlage aufgebaute Theorie wird dann freilich nicht den Vorzug besitzen, auf jede ihr vorgelegte Frage die richtige oder auch nur eine bestimmte Antwort zu geben; sie gibt aber wenigstens auf jede ihr vorgelegte Frage mögliche Antworten an, d. h. Antworten, welche weder mit den beobachteten Erscheinungen, noch mit den an ruhenden Körpern gewonnenen Anschauungen in Widerspruch treten.

Wir setzen also voraus, dass dem raumerfüllenden Mittel in jedem Punkte eine einzige bestimmte Geschwindigkeit beizulegen sei, deren Componenten in Richtung der  $x, y, z$  wir mit  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnen. Wir sehen diese Grössen überall als endlich an und behandeln sie als stetig von Punkt zu Punkt veränderlich. Unstetige Aenderungen lassen wir zwar auch zu, behandeln sie aber nur als den Grenzfall einer sehr schnellen stetigen Aenderung. Ausserdem unterwerfen wir jede zulässige Unstetigkeit der Beschränkung, dass dieselbe nirgends zur Bildung leerer Räume führen darf, diese Bedingung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die drei Differentialquotienten  $d\alpha/dx, d\beta/dy, d\gamma/dz$  überall endlich bleiben. Wo wir im Raum greifbare Materie finden, entnehmen wir der Bewegung dieser eindeutig die Werthe der  $\alpha, \beta, \gamma$ . Wo wir im Raume greifbare Materie nicht vorfinden, dürfen wir den  $\alpha, \beta, \gamma$  jeden willkürlichen Werth beilegen, welcher mit den gegebenen Bewegungen an der Grenze des leeren Raumes vereinbar und von gleicher Grössenordnung ist. Wir dürfen z. B. für  $\alpha, \beta, \gamma$  diejenigen Werthe setzen, welche sich im Aether finden würden, wenn sich derselbe wie irgend ein beliebig gewähltes Gas bewege. Im übrigen sollen sämtliche Bezeichnungen der oben erwähnten Arbeit hier in gleicher Bedeutung übernommen werden. Electricische und magnetische Kraft betrachten wir hier als Zeichen für den Zustand der bewegten Materie in gleichem Sinne, in welchem

wir sie früher als Zeichen für die Zustände der ruhenden Materie betrachteten. Electriche und magnetische Polarisation gelten uns nur als ein zweites gleichwerthiges Mittel, dieselben Zustände zu bezeichnen. Auch den Kraftlinien, durch welche wir diese Polarisationen darstellen, legen wir keine andere Bedeutung bei.

1. Aufstellung der Grundgleichungen für bewegte Körper.

In einem jeden Punkte eines ruhenden Körpers ist die zeitliche Aenderung des magnetischen Zustandes lediglich bedingt durch die Vertheilung der electricchen Kraft in der Nachbarschaft des Punktes. In einem bewegten Körper kommt zu dieser Aenderung eine zweite, welche sich der ersteren in jedem Augenblick überdeckt und welche von der Verzerrung herrührt, welche die Nachbarschaft des betrachteten Punktes bei der Bewegung erleidet. Wir behaupten nun, es sei der Einfluss der Bewegung derart, dass, wenn er allein wirksam wäre, er die magnetischen Kraftlinien mit der Materie fortführen würde. Oder genauer bestimmt: Denken wir uns in einem bestimmten Augenblicke den magnetischen Zustand der Substanz nach Richtung und Grösse dargestellt durch ein System von Kraftlinien, so würde ein durch die nämlichen materiellen Punkte gelegtes System von Kraftlinien auch in jedem späteren Augenblicke den magnetischen Zustand nach Richtung und Grösse darstellen, wenn nämlich der Einfluss der Bewegung allein zur Geltung käme. Die entsprechende Aussage gilt für die Aenderung, welche die electricche Polarisation durch die Bewegung erleidet. Diese Aussagen reichen hin, um die für ruhende Körper entwickelte Theorie auf bewegte Körper auszudehnen, sie genügen offenbar den Anforderungen, welche unser System an sie stellt und es wird sich zeigen, dass sie die beobachteten Thatfachen enthalten.

Um zunächst unsere Behauptung in Zeichen zu kleiden, fassen wir während eines Zeitelementes  $dt$  ein kleines Flächenstück im Inneren der bewegten Materie ins Auge, welches im Beginn des betrachteten Zeitelementes der  $yz$ -Ebene parallel liegt und während der Bewegung sich mit der Materie verschiebt und verzerrt. Wir ziehen die magnetischen Kraft-

linien in solcher Dichte, dass im Beginn der Zeit  $dt$  das betrachtete Flächenstück von der Anzahl  $\mathfrak{Q}$  derselben durchsetzt wird. Ueberall und stets ist dann durch  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  die Anzahl der Kraftlinien zu bezeichnen, welche ein gleich grosses, beziehlich der  $yz$ ,  $xz$ ,  $xy$ -Ebene paralleles Flächenstück durchschneiden. Die Zahl der Kraftlinien, welche unser besonderes Flächenstück durchsetzen, ändert sich nun aus verschiedenen Ursachen; wir wollen den Beitrag, welchen jede einzelne Ursache liefert, gesondert betrachten. Insofern erstens die genannte Anzahl sich verändern würde, wenn auch das Flächenstück in seiner ursprünglichen Lage verharrete, beträgt die Aenderung  $d\mathfrak{Q}/dt \cdot dt$ , wenn wir nämlich mit dem Symbol  $d\mathfrak{Q}/dt$  die Aenderungsgeschwindigkeit von  $\mathfrak{Q}$  in einem Punkte verstehen, welcher in Bezug auf unser Coordinatensystem ruht. Insofern zweitens das Flächenelement mit der Geschwindigkeit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  zu Orten fortgetragen wird, an welchen andere Werthe des  $\mathfrak{Q}$  herrschen, beträgt die Aenderungsgeschwindigkeit  $(\alpha d\mathfrak{Q}/dx + \beta d\mathfrak{Q}/dy + \gamma d\mathfrak{Q}/dz) dt$ . Insofern sich drittens die Ebene des Elementes mit der Geschwindigkeit  $da/dy$  um die  $z$ -Axe und mit der Geschwindigkeit  $da/dz$  um die  $y$ -Axe dreht, werden Kraftlinien in das Element aufgenommen, welche ursprünglich demselben parallel waren, es beträgt der Beitrag aus dieser Quelle  $-(\mathfrak{M} da/dy + \mathfrak{N} da/dz) dt$ . Endlich vergrössert das Element seinen Inhalt mit der Geschwindigkeit  $d\beta/dy + d\gamma/dz$  und wächst hierdurch die betrachtete Zahl um den Betrag  $\mathfrak{Q}(d\beta/dy + d\gamma/dz) dt$ . Sind die aufgezählten Beiträge sämmtlich Null, so ist eine Aenderung der betrachteten Zahl nicht möglich, wir haben also die Ursachen der Aenderung erschöpft und da sämmtliche Beiträge sehr klein sind, so entspricht ihre Summe der Gesamtänderung. Wir können aber diese letztere auch in anderer, mehr physikalischer Weise zerlegen, nämlich in den Beitrag, welchen das Vorhandensein der electrischen Kräfte in der Nachbarschaft allein und den Beitrag, welchen die Bewegung allein hervorbringen würde, wenn jedesmal die andere dieser Ursachen fehlte. Nach den für ruhende Leiter geltenden Gesetzen ist der erstere Beitrag gleich  $1/A \cdot (dZ/dy - dY/dz) dt$ ; der letztere ist nach unserer neu hinzugetretenen Behauptung

gleich Null; der erstere allein stellt also schon die Gesamtänderung dar. Wir setzen die beiden für die Gesamtänderung erhaltenen Ausdrücke einander gleich, dividiren durch  $dt$ , multipliciren mit  $A$ , addiren und subtrahiren die Glieder  $\alpha d\mathfrak{M}/dy + \alpha d\mathfrak{N}/dz$ , ordnen in zweckmässiger Weise und erhalten so, indem wir die gleichen Ueberlegungen auch für die übrigen Componenten der magnetischen und für die Componenten der electrischen Kraft durchführen, das folgende System der Grundgleichungen für bewegte Körper:

$$\begin{aligned}
 (1_a) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{d\mathfrak{Q}}{dt} + \frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{Q} - \alpha\mathfrak{M}) - \frac{d}{dz}(\alpha\mathfrak{R} - \gamma\mathfrak{Q}) + \alpha \left( \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ & A \left\{ \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{R}) - \frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{Q} - \alpha\mathfrak{M}) + \beta \left( \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ & A \left\{ \frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \frac{d}{dx}(\alpha\mathfrak{R} - \gamma\mathfrak{Q}) - \frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{R}) + \gamma \left( \frac{d\mathfrak{Q}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, \end{aligned} \right. \\
 (1_b) \quad & \left\{ \begin{aligned} & A \left\{ \frac{d\mathfrak{X}}{dt} + \frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y}) - \frac{d}{dz}(\alpha\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X}) + \alpha \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi Au, \\ & A \left\{ \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + \frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{Y} - \beta\mathfrak{Z}) - \frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Y}) + \beta \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi Av, \\ & A \left\{ \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} + \frac{d}{dx}(\alpha\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{X}) - \frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{Y} - \beta\mathfrak{Z}) + \gamma \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} \\ & \quad = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi Aw. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

zu deren Vervollständigung die linearen Beziehungen gehören, welche die Polarisationen und die Strömungscomponenten mit den Kräften verbinden. Die Constanten dieser Relationen sind als Functionen der sich ändernden Zustände der bewegten Materie und insofern als Functionen der Zeit zu betrachten.

Unsere Ableitung der Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) erfor-

derte nicht, dass das benutzte Coordinatensystem absolut im Raume ruhte. Wir können daher unsere Gleichungen von dem zuerst gewählten Coordinatensystem ohne Aenderung der Form auf jedes beliebige andere, im Raume beliebig bewegte Coordinatensystem dadurch transformiren, dass wir unter  $\alpha, \beta, \gamma$  die relativen Geschwindigkeitscomponenten in Bezug auf das neugewählte Coordinatensystem verstehen, und ebenso die von der Richtung abhängenden Constanten  $\varepsilon, \mu, \lambda, X', Y', Z'$  in jedem Augenblicke auf dieses beziehen. Daraus geht hervor, dass die absolute Bewegung eines starren Körpersystems keinen Einfluss auf irgend welche inneren electrodynamischen Vorgänge in demselben habe, sofern nur wirklich alle in Betracht kommenden Körper, also auch der Aether, an der Bewegung theilnehmen. Es geht ferner aus dieser Ueberlegung hervor, dass wenn sich auch nur ein einzelner Theil eines bewegten Systems bewegt wie ein starrer Körper, dass dann in diesem Theile sich die Vorgänge gerade so abspielen, als wie in ruhenden Körpern. Hat also die vorhandene Bewegung dennoch einen Einfluss auf diesen Theil, so kann doch dieser Einfluss nur entstanden sein in denjenigen Gebieten des Systems, in welchen Verzerrungen der Elemente stattfinden und muss sich von dort secundär fortgepflanzt haben zu denjenigen Gebieten, welche sich nach Art starrer Körper bewegen. Wird beispielsweise eine feste Metallmasse im magnetischen Felde plötzlich verschoben, so hat nach unseren Gleichungen diese Bewegung unmittelbar, d. h. gleichzeitig nur auf die Oberfläche und die Umgebung der Metallmasse einen Einfluss und ruft hier electricische Kräfte hervor, welche sich dann secundär, d. h. etwas später in das Innere der Masse fortpflanzen und hier Strömungen erzeugen.

Die aufgestellten Gleichungen sind nach Form und Absicht verwandt mit denjenigen, durch welche von Helmholtz im 78. Bande des Borchardt'schen Journals das Verhalten der electricischen und magnetischen Kräfte in bewegten Körpern darstellte.<sup>1)</sup> Die Bezeichnungen sind

1) v. Helmholtz, Ges. Abhandl. 1. p. 745, Borchardt's Journ. f. Mathem. 78. p. 273. 1874.

zum Theil von dort entlehnt. Doch sind unsere Gleichungen von den dort gegebenen nicht etwa nur der Form nach verschieden, vielmehr auch dem Inhalt nach hinsichtlich solcher Glieder, welche bisher an der Erfahrung nicht geprüft werden können. Maxwell selbst scheint mir von einer consequenten Einreihung der Erscheinungen in bewegten Körpern in sein System abgesehen zu haben. Die zahlreichen Betrachtungen, welche er derartigen Erscheinungen widmet, beschränken sich auf Fälle, oder begnügen sich mit Annäherungen, welche eine Unterscheidung zwischen den Theorien der Fernkräfte und denen der vermittelten Wirkung nicht nöthig machen.

## 2. Physikalische Bedeutung der einzelnen Glieder.

Die Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) geben uns den zukünftigen Werth der Polarisationen in jedem festen Punkte des Raumes oder, wenn wir lieber wollen, in jedem Theilchen der bewegten Materie als eindeutig bestimmte Folgeerscheinung der gegenwärtigen electromagnetischen Zustände und der gegenwärtigen Bewegung in der Nachbarschaft des betrachteten Punktes. Dies ist nach der Anschauung unseres Systemes die physikalische Bedeutung derselben. Ganz anders fasst die übliche Anschauung die durch jene Gleichungen gegebene Verknüpfung auf. Sie sieht in den linksstehenden Aenderungsgeschwindigkeiten der Polarisationen die Ursache, in den rechtsstehenden inducirten Kräften die Folgeerscheinung. Entstanden ist diese Vorstellung durch den Umstand, dass uns die Polarisationen und ihre Aenderungen meist eher und deutlicher bekannt werden, als die gleichzeitig stattfindenden Kräfte, dass also die linken Seiten der Gleichungen in Hinsicht unserer Kenntniss das frühere sind. Es hat auch diese Vorstellung sehr grosse Vortheile in den uns am meisten interessirenden Fällen; vom allgemeinen Standpunkte aus aber begegnet sie dieser Schwierigkeit, dass die Kräfte nicht eindeutig durch die Aenderungsgeschwindigkeiten der Polarisationen entgegengesetzter Art bestimmt sind, sondern von diesen Aenderungen unabhängige Summanden enthalten. Die übliche Theorie hilft sich, indem sie diese Summanden als electrostatische oder magnetische Kräfte den ihrer Angabe



nach durch unsere Gleichungen allein bestimmten electrodynamischen Kräften entgegenstellt. Obwohl wir eine solche Sonderung nicht billigen und daher die übliche Vorstellung über den Causalzusammenhang nicht annehmen können, ist es doch nicht ohne Interesse, zu zeigen, in welcher Weise in den einzelnen Gliedern unserer Gleichungen, die von der üblichen Theorie eingeführten Partialkräfte enthalten sind. Zu dem Ende zerlegen wir die Kräfte in der Form  $X=X_1+X_2$  etc.,  $L=L_1+L_2$  etc. und setzen:

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 = A(\gamma \mathfrak{M} - \beta \mathfrak{N}), & L_1 = A(\beta \mathfrak{Z} - \gamma \mathfrak{Y}), \\ Y_1 = A(\alpha \mathfrak{M} - \gamma \mathfrak{Q}), & M_1 = A(\gamma \mathfrak{X} - \alpha \mathfrak{Z}), \\ Z_1 = A(\beta \mathfrak{Q} - \alpha \mathfrak{M}), & N_1 = A(\alpha \mathfrak{Y} - \beta \mathfrak{X}), \end{cases}$$

wodurch wir dann für die  $X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2$  Gleichungen erhalten, welche aus den für  $X, Y, Z, L, M, N$  bestehenden Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) durch Weglassung der zweiten und dritten Glieder der linken Seiten hervorgehen. Nun ist zunächst die Resultante der  $X_1, Y_1, Z_1$  eine electricische Kraft, welche auftritt, sobald ein Körper sich im magnetischen Felde bewegt. Sie steht senkrecht auf der Richtung der Bewegung und der Richtung der magnetischen Kraftlinien, es ist diejenige Kraft, welche in engerem Sinne als die durch Bewegung inducirte electromotorische Kraft bezeichnet zu werden pflegt. Wir heben hervor, dass die Absonderung derselben aus der Gesamtkraft nach unseren Anschauungen schon deshalb eine physikalische Bedeutung nicht haben kann, weil dieser Anschauung die Vorstellung widerspricht, als könne das magnetische Feld als solches im Inneren eines Körpers eine relative Bewegung gegen denselben besitzen. Ein Gegenstück der Kraft  $X_1, Y_1, Z_1$  ist die Kraft  $L_1, M_1, N_1$ , welche sich in einem Nichtleiter bemerkbar machen muss, sobald derselbe durch die Kraftlinien eines electricischen Feldes bewegt wird; dieselbe ist noch durch keine Erfahrung bestätigt und fehlt in der älteren Electrodynamik.

Wenden wir weiter unsere Aufmerksamkeit der Resultanten der  $L_2, M_2, N_2$  zu und denken uns zu dem Zwecke die allgemeinen Lösungen der für diese Grössen bestehenden Gleichungen dargestellt als Functionen der Grössen  $u, d\mathfrak{X}/dt$ ,



$\alpha(d\mathfrak{X}/dx + d\mathfrak{Y}/dy + d\mathfrak{Z}/dz)$  etc. Setzen wir diese letzteren Grössen in den Functionen sämmtlich gleich Null, so bleibt ein erster Theil der Kraft übrig, welcher nicht von electrodynamischen Ursachen herrührt. Seine Componenten besitzen nothwendigerweise ein Potential, er stellt diejenige Fernkraft dar, welche nach der älteren Anschauung von magnetischen Massen ausgeht. Ein zweiter Theil der Kraft wird gegeben durch denjenigen Theil der Functionen, welcher zugleich und nur zugleich mit den  $u, v, w$  verschwindet. Er enthält die magnetische Fernkraft, welche von den eigentlichen electrischen Strömen auszugehen scheint. Den ganzen electrodynamischen Theil der Kraft  $L_2 M_2 N_2$  erhalten wir, wenn wir in dem Ausdruck des zweiten Theiles die Grösse  $4\pi Au$  ersetzen durch die Grösse:

$$4\pi Au + A \frac{d\mathfrak{X}}{dt} + A\alpha \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right)$$

und entsprechend mit den  $v, w$  verfahren. Es entspricht dies der Aussage, dass in Hinsicht der Erzeugung einer magnetischen Fernkraft dem eigentlichen Strome gleich zu achten sei erstens die Veränderung einer electrischen Polarisation, zweitens die convective Bewegung wahrer Electricität. Der letzte Theil dieser Aussage findet in dem Rowland'schen Versuche die gewünschte Bestätigung.

Endlich beachten wir die Kraft  $X_2 Y_2 Z_2$ . Es lässt sich zunächst auch aus dieser Kraft ein von den zeitlichen Veränderungen des Systems unabhängiger Theil absondern, welcher ein Potential besitzt und als electrostatische Fernkraft behandelt wird. Aus der übrig bleibenden electrodynamischen Kraft lässt sich ein zweiter Theil ablösen, welcher zugleich und nur zugleich mit den Grössen  $d\mathfrak{L}/dt, d\mathfrak{M}/dt, d\mathfrak{N}/dt$  verschwindet. Er stellt offenbar die Inductionskraft dar, welche von veränderlichen magnetischen Momenten herrührt, aber er enthält in versteckter Form auch diejenige electrische Kraft, welche veränderlichen Strömen ihr Dasein verdankt. Endlich bleibt übrig ein dritter und letzter Theil, welcher als eine durch convectiv bewegten Magnetismus erregte electrische Kraft gedeutet werden und zur Erklärung gewisser Erscheinungen der unipolaren Induction herangezogen werden muss.

Diese Auseinandersetzungen zeigen, dass wir zu dem Gleichungssystem (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) auch dadurch hätten gelangen können, dass wir die Wirkung der von den älteren Theorien geforderten Einzelkräfte addirt und eine Reihe hypothetischer Glieder hinzugefügt hätten, welche an der vorhandenen Erfahrung weder bestätigt, noch widerlegt werden können. Der Weg, welchen wir beschritten haben, machte eine geringere Zahl unabhängiger Hypothesen nothwendig. Wir wenden uns nunmehr dazu, aus unseren Gleichungen die wichtigsten allgemeinen Aussagen abzuleiten.

### 3. Bewegung von Magneten und electrostatisch geladenen Körpern.

Als unabhängige Ursachen für die Veränderung der electrischen, bez. magnetischen Polarisation erscheinen in unserer Auffassung erstens die magnetischen, bez. electricen Kräfte, zweitens die Bewegung der materiellen Körper. Erstere Ursache allein bewirkt nach dem, was wir für ruhende Körper ableiteten, keine Verschiebung der wahren Electricität in den nichtleitenden Körpern, keine Verschiebung des wahren Magnetismus überhaupt. Letztere Ursache bewirkt für sich allein wohl eine Verschiebung der Electricität und des Magnetismus gegen den ruhenden Raum, aber sie vermag keine Verschiebung gegen die bewegte Materie zu bewirken, da diese Materie bei der Bewegung die Kraftlinien, als deren freie Enden Electricität und Magnetismus betrachtet werden können, mit sich fortträgt. Es ist also auch, wenn beide Ursachen zusammenwirken, für den wahren Magnetismus überhaupt, für die wahre Electricität wenigstens in den Nichtleitern eine relative Bewegung gegen die umgebende Materie ausgeschlossen; Electricität und Magnetismus bewegen sich unter den genannten Umständen mit der Materie, in welcher sie sich finden, so, als ob sie unzerstörbar und fest an den Theilen derselben hafteten. Um die gleiche Ueberlegung in Zeichen durchzuführen, differentiiren wir das eine Mal die Gleichungen (1<sub>a</sub>), das andere Mal die Gleichungen (1<sub>b</sub>) beziehentlich nach  $xyz$ , und multipliciren mit dem als ruhend angesehenen Raumelement  $dr$ , auf welches sich die  $\mathfrak{Q}$ ,  $\mathfrak{M}$  etc. beziehen. Wir verstehen noch unter  $dr'$  ein

Raumelement, welches zu jeder Zeit die im gegenwärtigen Augenblick in  $d\tau$  enthaltene Materie umschliesst, wir nennen  $de'$  beziehentlich  $dm'$  die in  $d\tau'$  enthaltene Menge der wahren Electricität, beziehentlich des wahren Magnetismus und  $\mathfrak{L}'$ ,  $\mathfrak{M}'$  etc. die auf  $d\tau'$  bezüglichen Werthe der  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$  etc. Wir erhalten so:

$$(3_a) \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right. \\ & \quad + \alpha \frac{d}{dx} \left( \frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) + \beta \frac{d}{dy} \left( \frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \\ & \quad \left. + \gamma \frac{d}{dz} \left( \frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \left( \frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \right\} d\tau \\ & = \frac{d}{dt} \left\{ \left( \frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) d\tau' \right\} = 4\pi \frac{dm'}{dt} = 0. \end{aligned} \right.$$

$$(3_b) \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right. \\ & \quad + \alpha \frac{d}{dx} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) + \beta \frac{d}{dy} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \\ & \quad \left. + \gamma \frac{d}{dz} \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) \right\} d\tau \\ & = \frac{d}{dt} \left\{ \left( \frac{d\mathfrak{X}}{dx} + \frac{d\mathfrak{Y}}{dy} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dz} \right) d\tau' \right\} = 4\pi \frac{de'}{dt} \\ & = 4\pi \left( \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right). \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen enthalten unsere Aussage und ergänzen dieselbe hinsichtlich der Leiter. Sind die Geschwindigkeiten  $\alpha\beta\gamma$  so klein, dass die electricischen und magnetischen Zustände in jedem Augenblicke statischen Zuständen unendlich nahe bleiben können und beschränken wir uns auf die Betrachtung solcher quasistatischen Zustände, so ist der gewonnene Lehrsatz hinreichend, aber auch nothwendig, um die Abhängigkeit der ineinander überführbaren Zustände voneinander zu bestimmen. Die Hinzufügung dieses Satzes

erlaubt in derartigen Problemen die vollständigen, aber sehr complicirten Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) gleichwerthig zu ersetzen durch die sehr einfachen Gleichungen, welche für statische Probleme in ruhenden Körpern gelten und welche aus den Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) durch Nullsetzen der Geschwindigkeiten und der zeitlichen Aenderungen in allen Punkten des Raumes hervorgehen. Ohne den Begriff der Electricität und des Magnetismus einzuführen, ist eine gleiche Vereinfachung der Aussagen nicht möglich, und hierin vor Allem scheint mir die Unentbehrlichkeit begründet, welche diese Begriffe für die Electrostatik und die Darstellung der Erscheinungen an Magneten gewonnen haben.

#### 4. Induction in geschlossenen Bahnen.

Die grössten Geschwindigkeiten, welche wir den uns umgebenden Körpern ertheilen können, sind noch so klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, mit deren reciproken Werthe multiplicirt die  $\alpha, \beta, \gamma$  in den Gleichungen (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) auftreten, dass eigentliche electrodynamische Wirkungen der Bewegung nur in dem einzigen besonderen Falle der genaueren Untersuchung zugänglich werden, dass diese Wirkungen in der Induction eines electricischen Stromes in einer geschlossenen metallischen Leitung bestehen. Um die Grösse solcher Wirkungen in geschlossenen Bahnen zu bestimmen, fassen wir ein beliebiges, nicht geschlossenes Flächenstück  $\omega'$  ins Auge, welches, im Inneren der betrachteten Materie gelegen, sich mit den bewegten materiellen Theilchen, durch welche es einmal geführt wurde, verschiebt. Die augenblickliche Grenzcurve dieses Flächenstückes heisse  $s$ .  $\zeta'$  bedeute die Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche zu jeder Zeit die Fläche  $\omega'$  durchschneiden. Als unabhängig wirkende Ursachen, welche eine Aenderung von  $\zeta'$  herbeiführen, sehen wir wiederum an: erstens die electricischen Kräfte, zweitens die Bewegung der Materie. Würde erstere Ursache allein wirken, würde also das System ein ruhendes sein, so wäre die mit  $A$  multiplicirte Aenderungsgeschwindigkeit von  $\zeta'$  gleich dem um den ganzen Umfang  $s$  genommenen Integral der electricischen Kraft, das Integral genommen in einem

Sinne, welcher von der Seite der positiven Normale aus gesehen, dem der Drehung des Uhrzeigers entspricht. Die Bewegung allein wirkend aber würde eine Aenderung von  $\zeta'$  nicht zur Folge haben, da sie mit der Fläche  $\omega'$  auch die diese Fläche durchsetzenden Kraftlinien fortführte. Es ist also auch in dem wirklichen Falle des Zusammenwirkens beider Ursachen das um die beliebige geschlossene Curve  $s$  in dem angegebenen Sinne genommene Integral der electrischen Kraft gleich der mit  $A$  multiplicirten Aenderungsgeschwindigkeit der Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche eine anfänglich durch die Curve  $s$  begrenzte, der Bewegung folgende, übrigens aber beliebige Fläche  $\omega'$  durchsetzen. Der Satz gilt auch in dem besonderen, aber für den Versuch einzig wichtigen Falle, dass die Curve  $s$  der Bahn eines linearen Leiters folgt und wird nicht ungültig dadurch, dass die Bewegung hinreichend langsam ist, um die entstehenden Zustände beständig als stationäre, den entstehenden Strom als gleichförmig in allen Theilen der Leitung  $s$  erscheinen zu lassen.

Um unsere Ueberlegung in Zeichen zu kleiden, nennen wir  $n', x, n', y, n', z$  die Winkel, welche in jedem Augenblick die Normale des Elementes  $d\omega'$  der bewegten Fläche  $\omega'$  mit den Axen bildet.  $\mathfrak{L}' \mathfrak{M}' \mathfrak{N}'$  seien die Werthe der  $\mathfrak{L} \mathfrak{M} \mathfrak{N}$  in diesem Elemente. Es seien ferner bezeichnet mit  $d\omega, n, x, n, y, n, z$  die Werthe der  $d\omega', n', x, n', y, n', z$  in der Anfangslage. Wir beachten, dass wir aus rein geometrischen Gründen haben:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(d\omega' \cos n', x) &= d\omega \left\{ \left( \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n, x - \frac{d\beta}{dx} \cos n, y - \frac{d\gamma}{dx} \cos n, z \right\}, \\ \frac{d}{dt}(d\omega' \cos n', y) &= d\omega \left\{ -\frac{d\alpha}{dy} \cos n, x + \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n, y - \frac{d\gamma}{dy} \cos n, z \right\}, \\ \frac{d}{dt}(d\omega' \cos n', z) &= d\omega \left\{ -\frac{d\alpha}{dz} \cos n, x - \frac{d\beta}{dz} \cos n, y + \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) \cos n, z \right\},\end{aligned}$$

und erhalten also:

$$\frac{d\zeta'}{dt} = \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{L}' \cos n', x + \mathfrak{M}' \cos n', y + \mathfrak{N}' \cos n', z) d\omega'$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \left( \frac{d\Omega}{dt} + \alpha \frac{d\Omega}{dx} + \beta \frac{d\Omega}{dy} + \gamma \frac{d\Omega}{dz} \right) \cos n, x \, d\omega \\
 &+ \int \left( \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \alpha \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \beta \frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \gamma \frac{d\mathfrak{M}}{dz} \right) \cos n, y \, d\omega \\
 &+ \int \left( \frac{d\mathfrak{N}}{dt} + \alpha \frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \beta \frac{d\mathfrak{N}}{dy} + \gamma \frac{d\mathfrak{N}}{dz} \right) \cos n, z \, d\omega \\
 &+ \int \Omega \left( \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n, x \, d\omega - \int \Omega \frac{d\beta}{dx} \cos n, y \, d\omega - \int \Omega \frac{d\gamma}{dx} \cos n, z \, d\omega \\
 &- \int \mathfrak{M} \frac{d\alpha}{dy} \cos n, x \, d\omega + \int \mathfrak{M} \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \cos n, y \, d\omega - \int \mathfrak{M} \frac{d\gamma}{dy} \cos n, z \, d\omega \\
 &- \int \mathfrak{N} \frac{d\alpha}{dz} \cos n, x \, d\omega - \int \mathfrak{N} \frac{d\beta}{dz} \cos n, y \, d\omega + \int \mathfrak{N} \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) \cos n, z \, d\omega;
 \end{aligned}$$

demnach unter Zuhülfenahme der Gleichungen (1a) und (1b):

$$\begin{aligned}
 A \frac{d\zeta'}{dt} &= \int \left\{ \left( \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) \cos n, x + \left( \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right) \cos n, y + \left( \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right) \cos n, z \right\} d\omega \\
 &= \int (X dx + Y dy + Z dz),
 \end{aligned}$$

das letzte Integral um den Umfang  $s$  der Fläche  $\omega$  genommen.

In besonderen Fällen vereinfacht sich der gewonnene Satz. Ist es möglich, einen einfach zusammenhängenden Raum abzugrenzen, welcher die bewegte Curve  $s$  vollständig enthält und in welchem sich wahrer Magnetismus nicht findet, so ist es offenbar ohne Einfluss, ob die Hülfsfläche  $\omega'$  der Bewegung der materiellen Theile folgt oder eine von derselben unabhängige Verschiebung erleidet, wenn sie nur innerhalb jenes Raumes sich hält und von der Curve  $s$  begrenzt bleibt. In diesem Falle dürfen wir einfacher und darum doch eindeutig aussagen: das Integral der electricischen Kraft um die geschlossene Curve  $s$  genommen sei gleich der mit  $A$  multiplicirten Aenderungsgeschwindigkeit der Zahl von magnetischen Kraftlinien, welche von der Curve  $s$  umfasst werden. Halten wir die gemachte Voraussetzung fest und ist obendrein trotz der Bewegung von  $s$  die magnetische Polarisation in jedem festen Punkte des Raumes constant, so dürfen wir sagen, die in der Curve  $s$  inducirte Kraft sei

gleich der mit  $A$  multiplicirten Zahl der im Raume ruhend gedachten magnetischen Kraftlinien, welche die Curve  $s$  bei ihrer Bewegung in bestimmtem Sinne durchschneidet. Rühren die magnetischen Kräfte, unter deren Einfluss sich die Curve  $s$  bewegt, einzig und allein von dem Einflusse des gleichförmigen Stromes in einer Strombahn  $t$  her, so ist die Zahl der  $s$  durchsetzenden Kraftlinien, wie wir sahen<sup>1)</sup>, gleich dem Product aus dem Neumann'schen Potential der Curven  $s$  und  $t$  aufeinander und der Stromstärke in  $t$ . In diesem Falle gibt also die mit  $A$  multiplicirte Aenderung des genannten Productes auf die Zeiteinheit berechnet die in der Curve  $s$  wirksame electromotorische Kraft.

In der einen oder anderen Form enthalten diese Sätze alle bekannten sorgfältig untersuchten Fälle der Induction. Auch die Gesetze der unipolaren Induction lassen sich aus der allgemeinen Aussage leicht herleiten. Inductionerscheinungen in dreifach ausgedehnten Körpern sind nur in beschränktem Maasse quantitativ erforscht worden. Die Gleichungen, durch welche Jochmann<sup>2)</sup> und andere den Umfang der gefundenen Thatsachen wiedergeben konnten, entstehen unmittelbar aus unseren allgemeinen Gleichungen durch Weglassung einer Reihe von Gliedern, welche in Folge der besonderen Natur der behandelten Probleme verschwinden.

Wir wollen nicht unerwähnt lassen, dass wir den allgemeinen Satz der Induction in eine weitere, sehr elegante Form kleiden können, wenn wir uns erlauben, von einer selbstständigen Bewegung der Kraftlinien zu reden und allgemein jede Aenderung der magnetischen Polarisirung als die Folge einer solchen Bewegung der Kraftlinien anzusehen. Wir können alsdann auch allgemeingültig und erschöpfend aussagen: es sei die in einer beliebigen geschlossenen Curve  $s$  inducirte electricische Kraft gleich der mit  $A$  multiplicirten Zahl der magnetischen Kraftlinien, welche in der Zeiteinheit von der Curve  $s$  in bestimmtem Sinne durchschnitten werden. Indessen, wenn gegen die gelegentliche Benutzung der zu Grunde liegenden Anschauungsweise nichts

1) H. Hertz, l. c. p. 614.

2) Jochmann, Crelle's Journ. 63. p. 1. 1863.



einzuwenden ist, so thun wir doch besser, sie in der gegenwärtigen Abhandlung zu vermeiden. Denn die von Faraday ebenfalls benutzte, von Poynting<sup>1)</sup> entwickelte Vorstellung, als könnten die Kraftlinien eine relative Bewegung gegen das umgebende Medium besitzen, ist zwar höchst bemerkenswerth und mag durchführbar sein; sie ist aber durchaus verschieden von der hier benutzten Anschauung, derzufolge die Kraftlinien lediglich ein Symbol für besondere Zustände der Materie darstellen. Es hat keinen Sinn, von einer selbstständigen Bewegung solcher Zustände zu reden. Auch ist zu bemerken, dass die controlirbare Ab- und Zunahme der Kraftlinien in allen Theilen des Raumes die unterstellte Bewegung der Kraftlinien noch nicht eindeutig bestimmt. Der eben ausgesprochene Satz würde daher an sich auch nicht in allen Fällen eindeutig die Grösse der Induction liefern, sondern vielmehr als eine Definition zu betrachten sein, durch welche unter den möglichen Bewegungen der Kraftlinien eine bestimmte als die wirkliche bezeichnet wird.

##### 5. Behandlung von Gleitflächen.

An der Grenze zweier heterogenen Körper können die electrodynamischen Constanten in unstetiger Weise von einem Werthe zu einem anderen übergehen, ohne dass gleichzeitig die Geschwindigkeitscomponenten  $\alpha \beta \gamma$  an dieser Grenzfläche unstetige Aenderungen erlitten. Als Unstetigkeitsflächen dieser Art sind zu betrachten die Berührungsflächen zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten oder zwischen Flüssigkeiten untereinander; auch steht es uns frei, von dieser Beschaffenheit den Uebergang an der Grenze der Körper gegen den Aether vorauszusetzen. Das Hinzutreten der stetigen Bewegung gibt an solchen Unstetigkeitsflächen zu neuen Betrachtungen keinen Anlass; die Zustände der materiellen Theile auf beiden Seiten der Fläche sind durch dieselben Relationen mit einander verknüpft, welche auch in ruhenden Körpern Gültigkeit haben.

Anders liegt die Sache für Flächen, an welchen auch

1) J. H. Poynting, Phil. Trans. 2. p. 277. 1885.

die Geschwindigkeitscomponenten unetigen Aenderungen unterliegen. Da nach einer Bemerkung der Einleitung die Unetigkeit nur die zur Grenzfläche parallelen Componenten der Geschwindigkeit betreffen kann, so bezeichnen wir Flächen dieser Art passend als Gleitflächen. Sie können sich finden zwischen festen Körpern, welche einander berühren; auch ist es bisweilen bequem und bei unserer Unkenntniss des wahren Verhältnisses alsdann auch erlaubt, die Grenzfläche eines Körpers gegen den Aether als eine Gleitfläche anzusehen. Wie wir ebenfalls schon in der Einleitung bemerkten, behandeln wir eine Gleitfläche als den Grenzfall einer Uebergangsschicht, in welcher die Bewegungen und möglicherweise auch die electrodynamischen Constanten zwar sehr schnell aber doch stetig von einem Werth auf einen anderen übergehen. Diese Auffassung verbürgt uns, dass die allgemeinen Sätze, welche wir bisher ableiteten, nicht ungültig werden in einem Systeme, in welchem sich Gleitstellen vorfinden, sie findet ihre Berechtigung darin, dass sie zu Widersprüchen mit der Erfahrung nicht führt. Damit sie hinreichend sei, um die Verhältnisse in der Grenzfläche zu bestimmen, muss die Art des Uebergangs gewissen allgemeinen Beschränkungen unterworfen werden. Wir geben diese Beschränkungen in der Gestalt von Voraussetzungen über die Endlichkeit einer Reihe von Grössen auch in der Uebergangsschicht selbst. Von dem Auftreten electromotorischer Kräfte in der Gleitfläche sehen wir ab. Wir verlegen den Anfangspunkt des Coordinatensystems, auf welches wir uns beziehen, in einen beliebigen Punkt des in Betracht genommenen Elementes der Uebergangsschicht und lassen ihn diesem Punkte auch bei der Bewegung folgen. Wir geben ferner der  $z$ -Axe eine solche Richtung, dass sie auf dem Elemente der Gleitfläche senkrecht steht und auch bei der Bewegung senkrecht bleibt. Die Uebergangsschicht bildet dann stets die unmittelbare Nachbarschaft der  $xy$ -Ebene. Wir setzen voraus, dass auch in der Uebergangsschicht selbst die Grössen:

$$\begin{array}{cccccc} X & Y & Z & L & M & N \\ x & y & z & \varrho & \mathfrak{M} & \mathfrak{N} \\ u & v & w & \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

endlich bleiben, ebenso die Differentialquotienten dieser Grössen parallel zur Gleitfläche, also nach  $x$  und  $y$ , ferner die Differentialquotienten der Grössen:

$$\mathfrak{X} \mathfrak{Y} \mathfrak{Z} \mathfrak{Q} \mathfrak{M} \mathfrak{N}$$

nach der Zeit  $t$ . Dagegen dürfen wir nicht ausschliessen, dass die Differentialquotienten nach  $z$  unendlich werden, mit Ausnahme von  $d\gamma/dz$ , welches zufolge der erwähnten Bemerkung der Einleitung endlich bleiben muss.  $\gamma$  selbst ist demnach überall in der Uebergangsschicht verschwindend klein. Dies vorausgesetzt, multipliciren wir die ersten beiden Gleichungen der Systeme (1<sub>a</sub>) und (1<sub>b</sub>) mit  $dz$ , integriren nach  $z$  durch die Uebergangsschicht hindurch zwischen zwei derselben äusserst naheliegenden Punkten und beachten, dass bei der Kürze des Integrationsweges das Integral jeder in der Schicht endlich bleibenden Grösse verschwindet. Wir erhalten so, indem wir den Index 1 auf die eine Seite, den Index 2 auf die andere Seite der Grenzfläche beziehen, die vier Gleichungen:

$$(5_a) \quad A \int_1^2 \mathfrak{R} \frac{d\alpha}{dz} dz = Y_2 - Y_1, \quad -A \int_1^2 \mathfrak{R} \frac{d\beta}{dz} dz = X_2 - X_1,$$

$$(5_b) \quad -A \int_1^2 \mathfrak{Z} \frac{d\alpha}{dz} dz = M_2 - M_1, \quad A \int_1^2 \mathfrak{Z} \frac{d\beta}{dz} dz = L_2 - L_1.$$

Dieselben geben die Verknüpfung der zur Grenzfläche tangentialen Kraftcomponenten auf beiden Seiten derselben miteinander. Die zur Grenzfläche normalen Componenten sind hier wie in ruhenden Körpern verknüpft durch die Bedingung, dass die Flächendichtigkeit des wahren Magnetismus in der Grenzfläche sich nicht auf andere Weise ändern könne, als durch Convection und die Flächendichtigkeit der wahren Electricität nicht auf anderem Wege, als entweder durch Convection oder durch einen eigentlichen Strom.

Ist das betrachtete Element der Grenzschicht von einer Belegung mit wahrer Electricität und wahren Magnetismus frei, so sind  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{R}$  im Inneren der Uebergangsschicht constant, die Gleichungen (5<sub>a</sub>) und (5<sub>b</sub>) nehmen dann die einfacheren Formen an:

$$(5_c) \quad X_2 - X_1 = A\mathfrak{N}(\beta_1 - \beta_2), \quad Y_2 - Y_1 = A\mathfrak{N}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$(5_d) \quad L_2 - L_1 = A\mathfrak{Z}(\beta_2 - \beta_1), \quad M_2 - M_1 = A\mathfrak{Z}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Um ein Beispiel zu geben, in welchem diese Gleichungen zur Anwendung kommen würden, denken wir uns, dass ein fester Rotationskörper um seine Axe sich drehe in einem ihn eng umschliessenden Hohlraum eines anderen festen Körpers. Wird dies System dem Einfluss einer magnetischen Kraftvertheilung unterworfen, welche symmetrisch um die Rotationsaxe ist, so wird nach unserer Auffassung weder im Inneren des rotirenden Körpers, noch auch im Inneren der ihn umhüllenden Masse ein Anlass zum Auftreten electrischer Kräfte vorliegen. Solche Kräfte werden in der That ausbleiben, wenn die magnetische Erregung sich ganz auf das Innere des einen oder des anderen Körpers beschränkt. Durchsetzen aber die Kraftlinien die Fläche, in welcher beide Körper aneinander gleiten, so werden an dieser Fläche die durch Gleichung (5<sup>c</sup>) gegebenen electromotorischen Kräfte wachgerufen, welche sich in das Innere der Körper verbreiten und dort die electrischen Spannungen und Ströme erzeugen, über deren thatsächliches Auftreten unter solchen Verhältnissen uns die Versuche nicht im Zweifel lassen. Sind die betrachteten Körper Nichtleiter und unterwerfen wir sie dem Einfluss electrischer Kräfte, welche zur Rotationsaxe symmetrisch vertheilt sind und an der Gleitfläche nicht verschwinden, so ruft nunmehr die eingeleitete Bewegung zufolge der Gleichungen (5<sub>a</sub>) in der Nachbarschaft magnetische Kräfte hervor. Derartige Wirkungen sind allerdings noch nicht mit gleicher Sicherheit wie die zuerst erwähnten beobachtet worden, doch liegt wenigstens eine Andeutung derselben in den Versuchen des Hrn. Röntgen vor.<sup>1)</sup>

In dem allgemeinen Falle, in welchem sich an der Grenzfläche eine Belegung wahrer Electricität und wahren Magnetismus findet, genügt die Kenntniss der Flächendichtigkeit derselben allein nicht, um die Integrale der Gleichungen (5<sub>a</sub>) und (5<sub>b</sub>) zu ermitteln; es muss vielmehr weiter bekannt sein, in welchem Maasse in der Uebergangsschicht Electricität und Magnetismus an der Bewegung des einen und des

1) W. C. Röntgen, Wied. Ann. 35. p. 264. 1888.

anderen der sich berührenden Körper theilnehmen. Diese Unbestimmtheit liegt durchaus in der Natur der Sache. Man denke sich in dem Rowland'schen Versuch über die magnetische Wirkung der convectiv bewegten Electricität die electrisirte Scheibe rotirend anstatt in Luft in einem eng umschliessenden festen Isolator. Die magnetische Wirkung würde offenbar bis zum Verschwinden herabsinken in dem Maasse, in welchem die Electricität von der Oberfläche der rotirenden Scheibe auf die berührende Oberfläche des ruhenden Körpers überginge.

#### 6. Erhaltung der Energie. Ponderomotorische Kräfte.

Wir denken uns den Uebergang des Systems aus dem Anfangszustand in den Endzustand während eines jeden Zeitelementes in zwei Stadien zerlegt. Das erste Stadium soll sämtliche materiellen Theile aus der Anfangslage in die Endlage überführen und dabei die Kraftlinien lediglich der Bewegung der materiellen Theile folgen lassen. In dem zweiten Stadium soll die Wirkung der nunmehr vorhandenen electrischen und magnetischen Kräfte zur Geltung kommen und auch die electromagnetischen Zustände in die Endlage überführen. Die Aenderung, welche die electromagnetische Energie des Systems während des ganzen Ueberganges erfährt, ist die Summe der Aenderungen, welche sie in den beiden Stadien erleidet. Die Vorgänge während des zweiten Stadiums sind Vorgänge in ruhenden Körpern; wir wissen bereits, in welcher Weise bei solchen Vorgängen die Aenderungen der electromagnetischen Energie durch andere Formen der Energie compensirt werden. Während des ersten Stadiums aber ändert sich die electromagnetische Energie eines jeden materiellen Theiles des Systems ebenfalls; es bleibt also übrig, Rechenschaft abzulegen über den Verbleib der so verminderten oder den Ursprung der so vermehrten electromagnetischen Energie. Für den Umfang der vorhandenen Erfahrung lässt sich ohne Unsicherheit die Richtigkeit der Aussage erweisen, dass in jedem vollständigen electromagnetischen System die in Rede stehende Energie compensirt wird durch die mechanische Arbeit, welche während des betrachteten Zeitelementes von den electrischen und magnetischen pondero-

motorischen Kräften des Systems geleistet wird. Als allgemeingültig angenommen reicht indessen diese Aussage noch nicht hin, um allgemein und mit Strenge die ponderomotorischen Kräfte aus den berechenbaren Aenderungen der electromagnetischen Energie abzuleiten. Wir fügen deshalb derselben zwei ihr nicht widersprechende Annahmen hinzu, welche nicht durch die Erfahrung, sondern durch unsere besonderen Anschauungen gefordert werden. Die erste Annahme erklärt die angegebene und für jedes vollständige electromagnetische System erfahrungsmässig zutreffende Aussage auch für jeden beliebigen materiellen Theil eines solchen Systems für gültig. Die zweite Annahme sagt aus, dass ein beliebiger Theil des Systems auf das übrige System keine anderen ponderomotorischen Kräfte ausüben könne, als Druckkräfte, welche an der gemeinsamen Oberfläche von den Elementen des ersten Theils auf die berührenden Elemente des übrigen Theils ausgeübt werden und welche in jedem Punkte der Berührungsfläche lediglich von den electromagnetischen Zuständen der unmittelbaren Nachbarschaft abhängig sind. Durch die erste Annahme sind eindeutig die von der zweiten Annahme geforderten Druckkräfte bestimmt; wir wollen die Grösse derselben ableiten und zeigen, dass sie hinreichen, um die Thatfachen der unmittelbaren Wahrnehmung zu erklären. Dass dann auch in bewegten Körpern dem Princip von der Erhaltung der Kraft Genüge geleistet ist, geht aus der Ableitung der Druckkräfte selber hervor.

Fassen wir während des Zeitelementes  $dt$  die magnetische Energie eines materiellen Theilchens ins Auge, dessen veränderliches Volumen  $d\tau'$  genannt werden möge, während  $d\tau$  den Werth von  $d\tau'$  im Beginne des Zeitelementes  $dt$  bezeichne. Den Aufangspunkt des benutzten Coordinatensystems legen wir zur Vereinfachung der Betrachtungen dauernd in einen materiellen Punkt des Raumes  $d\tau'$ . Würde sich  $d\tau'$  bewegen wie ein starrer Körper, indem es seine Kraftlinien mit sich fortführt, so würde sich sein Energieinhalt nicht ändern. Allgemein muss also die Aenderung dieser Energie lediglich eine Function der Verzerrungen sein, welche  $d\tau'$  infolge der Bewegung erleidet; unsere Aufgabe ist zunächst, jene Aenderung in dieser Form darzustellen.

Es ändern sich nun aber infolge der Verzerrungen nicht allein die Polarisationen, sondern auch die Eigenschaften des materiellen Trägers derselben, also die magnetischen Constanten. Um diese Aenderung in die Rechnung einführen zu können, müssen wir eine Reihe weiterer Bezeichnungen festsetzen. Wir definiren zunächst neben den Constanten  $\mu$  eine Reihe von Constanten  $\mu'$  durch die Bestimmung, dass sein soll:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N \\ &= \mu_{11}L^2 + 2\mu_{12}LM + \text{etc.} \\ &= \mu'_{11}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Die  $\mu'$  sind also die Coëfficienten der  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  in den linearen Functionen dieser Grössen, durch welche die Kräfte dargestellt werden. Wir nennen ferner für den Augenblick  $\xi\eta\zeta$  die Verschiebungen, welche der Punkt, dessen Geschwindigkeiten  $\alpha\beta\gamma$  sind, aus der im Anfang der Zeit  $dt$  innegehabten Lage erleidet. Es sind dann die Grössen:

$$\frac{d\xi}{dx} = x_x, \quad \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = x_y, \quad \text{etc.}^1),$$

die Componenten der Verzerrungen des Elementes  $d\tau'$ , in welchem die Verschiebungen  $\xi\eta\zeta$  sich finden. Die Constanten  $\mu'$  sind Functionen dieser Grössen, sie hängen ausserdem ab von den Drehungen  $\rho, \sigma, \tau$ , welche das Element neben der Verzerrung erleidet. Da während des Zeitelementes  $dt$  sowohl die  $x_x, x_y$ , etc., als die  $\rho, \sigma, \tau$  verschwindend klein bleiben, so ist die Abhängigkeit eine lineare, sie ist uns bekannt, sobald uns die Differentialquotienten der  $\mu'$  nach den  $\rho, \sigma, \tau, x_x, x_y$  etc. gegeben werden. Die Differentialquotienten nach den  $\rho, \sigma, \tau$  sind aus den augenblicklichen Werthen der  $\mu'$  selbst berechenbar. Für die Differentialquotienten nach den  $x_x, x_y$ , etc. aber gilt nicht das Gleiche und wir müssen daher annehmen, dass uns anderweitig gegeben werden die Grössen:

$$\begin{aligned} \frac{d\mu'_{11}}{dx_x} &= \mu'_{11,11}, & \frac{d\mu'_{11}}{dx_y} &= \mu'_{11,12}, \quad \text{etc.,} \\ \frac{d\mu'_{12}}{dx_x} &= \mu'_{12,11}, & \frac{d\mu'_{12}}{dx_y} &= \mu'_{12,12}, \quad \text{etc.,} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

1) Vgl. G. Kirchhoff, Mechanik p. 123. 1877.



Die so definirten 36 Constanten entsprechen offenbar magnetischen Eigenschaften des besonderen den Raum  $d\tau'$  erfüllenden Stoffes in seinem augenblicklichen Zustande der Deformation; keine dieser Constanten können wir zu unserem Vorhaben entbehren, keine können wir auch aus den bisher behandelten magnetischen Eigenschaften des Stoffes a priori ableiten. Durch geeignete Orientirung des benutzten Coordinatensystemes lässt sich die Zahl der erforderlichen Constanten vermindern; eine Verminderung tritt ebenfalls ein, wenn Symmetrieverhältnisse hinsichtlich des gewählten Coordinatensystemes obwalten. In dem einfachsten Falle, in welchem die Substanz sowohl im Anfangszustande isotrop ist, als auch trotz jeder eintretenden Deformation isotrop bleibt, in einer Flüssigkeit also, sinkt die Zahl der neuen Constanten auf eine einzige herab, welche alsdann zusammen mit der einen Magnetisirungsconstanten die magnetischen Eigenschaften in ausreichender Weise definirt. Es erscheint übrigens nicht unwahrscheinlich, dass auch im allgemeinen Falle nothwendige Beziehungen zwischen den Constanten sich nachweisen lassen, welche dieselben auf eine kleinere Anzahl unabhängiger Constanten zu reduciren getatten.

Diese Bezeichnungen nun vorausgesetzt, erhalten wir für die in der Zeiteinheit erfolgende Aenderung des magnetischen Energieinhaltes des Raumes  $d\tau'$  nacheinander die folgenden Ausdrücke:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{L} L + \mathfrak{M} M + \mathfrak{N} N) d\tau' \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi} \left\{ d\tau \frac{d}{dt} (\mu_{11}' \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}' \mathfrak{L} \mathfrak{M} + \text{etc.}) \right. \\ &\quad \left. + (\mathfrak{L} L + \mathfrak{M} M + \mathfrak{N} N) \frac{d}{dt} d\tau' \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi} d\tau \left\{ 2 \left( L \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + M \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + N \frac{d\mathfrak{N}}{dt} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{d\mu_{11}'}{dt} \mathfrak{L}^2 + 2 \frac{d\mu_{12}'}{dt} \mathfrak{L} \mathfrak{M} + \text{etc.} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\mathfrak{L} L + \mathfrak{M} M + \mathfrak{N} N) \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wir entfernen in dem letzten derselben die Differentialquotienten nach  $t$ . Für die Grössen  $d\mathfrak{L}/dt$ ,  $d\mathfrak{M}/dt$ ,  $d\mathfrak{N}/dt$

geben uns die Gleichungen (1<sub>a</sub>), indem wir in denselben nur den Einfluss der Bewegung berücksichtigen und die Geschwindigkeiten  $\alpha, \beta, \gamma$  in Hinblick auf die besondere Wahl unseres Coordinatensystems gleich Null setzen:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = -\mathfrak{L} \left( \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) + \mathfrak{M} \frac{d\alpha}{dy} + \mathfrak{N} \frac{d\alpha}{dz},$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -\mathfrak{M} \left( \frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\alpha}{dx} \right) + \mathfrak{N} \frac{d\beta}{dz} + \mathfrak{L} \frac{d\beta}{dx},$$

$$\frac{d\mathfrak{N}}{dt} = -\mathfrak{N} \left( \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} \right) + \mathfrak{L} \frac{d\gamma}{dx} + \mathfrak{M} \frac{d\gamma}{dy}.$$

Ferner haben wir für die Grösse  $d\mu_{11}'/dt$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{11}'}{dt} &= \frac{d\mu_{11}'}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d\mu_{11}'}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \text{etc.} \\ &+ \frac{d\mu_{11}'}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} + \text{etc.} \\ &= \mu_{11}'_{11} \frac{d\alpha}{dx} + \mu_{11}'_{12} \left( \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right) + \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d\mu_{11}'}{dq} \left( \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Analoge Ausdrücke leiten wir ab für  $d\mu_{12}'/dt$ , etc. Wir setzen alle diese Ausdrücke in die rechte Seite der Gl. (6) ein, es wird alsdann diese Seite eine homogene lineare Function der neun Differentialquotienten der  $\alpha \beta \gamma$  nach den  $xyz$ . Wir können und wollen aber diese Function so ordnen, dass sie uns erscheint als homogene lineare Function der sechs Deformationsgeschwindigkeiten  $d\alpha/dx$ ,  $d\alpha/dy + d\beta/dx$ , etc. und der drei Rotationsgeschwindigkeiten  $\frac{1}{2}(d\alpha/dy - d\beta/dx)$ , etc. Wir beachten dabei, dass die Coëfficienten der drei Rotationsgeschwindigkeiten nothwendigerweise identisch verschwinden müssen, da eine Bewegung des Theilchens als starren Körpers eine Aenderung seines Energieinhaltes nicht herbeiführt. Dementsprechend werfen wir die mit diesen Rotationsgeschwindigkeiten behafteten Glieder einfach ab und erhalten nunmehr als Endresultat, indem wir noch durch Division mit  $d\tau$  auf die Einheit des Volumens reduciren:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{d\tau} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{L} L + \mathfrak{M} M + \mathfrak{N} N) d\tau \right\} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \frac{d\alpha}{dx} (\mathfrak{L} L - \mathfrak{M} M - \mathfrak{N} N + \mu_{11}',_{11} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{11} \mathfrak{L} \mathfrak{M} + \text{etc.}) \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \frac{d\beta}{dy} (-\mathfrak{L} L + \mathfrak{M} M - \mathfrak{N} N + \mu_{11}',_{22} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{22} \mathfrak{L} \mathfrak{M} + \text{etc.}) \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \frac{d\gamma}{dz} (-\mathfrak{L} L - \mathfrak{M} M + \mathfrak{N} N + \mu_{11}',_{33} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{33} \mathfrak{L} \mathfrak{M} + \text{etc.}) \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dy} \right) (\mathfrak{M} M + \mathfrak{N} N + \mu_{11}',_{23} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{23} \mathfrak{L} \mathfrak{M} + \text{etc.}) \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz} \right) (\mathfrak{L} N + \mathfrak{M} L + \mu_{11}',_{13} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{13} \mathfrak{L} \mathfrak{M} + \text{etc.}) \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \left( \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dz} \right) (\mathfrak{M} L + \mathfrak{L} M + \mu_{11}',_{12} \mathfrak{L}^2 + 2\mu_{12}',_{12} \mathfrak{L} \mathfrak{M} + \text{etc.})
 \end{aligned}
 \tag{6a}$$

In der rechts stehenden linearen Function der Verzerrungsgeschwindigkeiten gibt nun offenbar der negativ genommene Coëfficient einer jeden dieser Geschwindigkeiten diejenige Druckcomponente an, mit welcher die magnetisch gestörte Materie die betreffende Verzerrung zu vergrössern strebt. Nennen wir nämlich in üblicher<sup>1)</sup> Bezeichnungsweise  $X_x X_y X_z$  die Componente des Druckes, welchen die Materie des Elementes  $d\tau$  auf eine senkrecht zur  $x$ -Axe gelegte Schnittfläche ausübt, und erweitern wir diese Symbolik auch auf die Richtung der anderen Axen, so gibt der Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 & X_x \frac{d\alpha}{dx} + Y_y \frac{d\beta}{dy} + Z_z \frac{d\gamma}{dz} \\
 & + Y_z \left( \frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy} \right) + X_z \left( \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz} \right) + X_y \left( \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx} \right)
 \end{aligned}$$

die mechanische Arbeit an, welche der materielle Inhalt des Elementes  $d\tau$  bei eintretender Verzerrung leistet, berechnet auf die Einheit der Zeit und des Volumens. Nach unserer Annahme ist diese mechanische Arbeit der infolge der Verzerrung verlorenen magnetischen Energie gleich. Da dies gilt für jede mögliche Deformation, so ergibt sich die Richtigkeit unserer Aussage. Jede der gewonnenen Druckcom-

1) G. Kirchhoff, Mechanik. Elfte Vorlesung.

ponenten ist eine homogene quadratische Function der drei Componenten der herrschenden magnetischen Kraft, mit gleichem Rechte auch der drei Componenten der herrschenden magnetischen Polarisation. Durch vollkommen analoge Betrachtungen lassen sich vollkommen analoge Ausdrücke herleiten für die Druckkräfte, welche infolge der electricischen Störungen auftreten. Der Gesamtdruck ergibt sich gleich der Summe des magnetischen und des electricischen.

An die gefundenen Werthe der ponderomotorischen Druckkräfte knüpfen wir drei Bemerkungen. Die erste Bemerkung betrifft die Unterschiede zwischen unserem System der Drucke und dem System, welches Maxwell für den allgemeinen Fall angegeben hat, in welchem Kräfte und Polarisationen verschiedene Richtung haben.<sup>1)</sup> Maxwell's Formen sind zunächst einfacher, da bei ihrer Ableitung auf die mögliche Deformation des Mediums keine Rücksicht genommen ist. Ein Unterschied von weit grösserer Wichtigkeit besteht darin, dass die Druckcomponenten, welche nach der angewandten Symbolik mit  $X_y$  und  $Y_z$  zu bezeichnen sind, bei Maxwell verschiedene Werthe haben, bei uns identisch sind. Nach unserem System wird jedes sich selbst überlassene materielle Theilchen lediglich seine Gestalt verändern, zufolge des Maxwell'schen Systems würde es zugleich als Ganzes eine Rotation annehmen. Die Maxwell'schen Drucke können daher inneren Vorgängen des Elements ihr Dasein nicht verdanken, sie finden also keinen Platz in der hier ausgearbeiteten Theorie. Sie sind allerdings zulässig, wenn man von der Annahme ausgeht, dass im Inneren der bewegten Körper der Aether dauernd ruht und den nöthigen Stützpunkt für die eintretende Drehung liefert.

Die zweite Bemerkung betrifft die Vereinfachung, welche unsere Formeln annehmen, wenn wir sie anwenden auf Körper, welche isotrop sind und trotz jeder Deformation isotrop bleiben, also auf Flüssigkeiten. Das System der Constanten  $\mu'$  beschränkt sich hier auf die eine Constante  $\mu' = 1/\mu$ . Bezeichnen wir ferner mit  $\sigma$  die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so haben wir

1) Maxwell, Treat. on electr. and magnet. 2. p. 254. 1873.

$$\begin{aligned}\mu'_{11},_{11} &= \mu'_{22},_{22} = \mu'_{33},_{33} = -\frac{d\left(\frac{1}{\mu}\right)}{d \log \sigma} = \frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{d \log \sigma}, \\ \mu'_{12},_{11} &= \text{etc.} = 0.\end{aligned}$$

Also werden die Druckcomponenten:

$$\begin{aligned}(6b) \quad \begin{cases} X_x = \frac{\mu}{8\pi} (-L^2 + M^2 + N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma} (L^2 + M^2 + N^2), \\ Y_y = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 - M^2 + N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma} (L^2 + M^2 + N^2), \\ Z_z = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 - N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma} (L^2 + M^2 + N^2), \\ X_y = -\frac{\mu}{4\pi} LM, \quad X_z = -\frac{\mu}{4\pi} NL, \quad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi} MN. \end{cases}\end{aligned}$$

Zu völlig identischen Formen ist im Verfolg eines ähnlichen Gedankenganges für den gleichen Fall bereits von Helmholtz<sup>1)</sup> gelangt, in dessen Formeln die unseren übergehen, wenn wir die Bezeichnungen in der Weise ändern, dass wir  $L, M, N, \mu$  durch  $\lambda/\vartheta, \mu/\vartheta, \nu/\vartheta, 1 + 4\pi\vartheta$  ersetzen und weiter beachten, dass das  $\theta$  der von Helmholtz'schen Formeln gleich  $d\vartheta/d \log \sigma = d\mu/4\pi d \log \sigma$  ist.<sup>2)</sup>

Die dritte Bemerkung betrifft die Frage, inwieweit die Resultanten der aus unsern Hypothesen abgeleiteten Drucke übereinstimmen mit den mechanischen Kräften und Kräftepaaren, welche wir an den electromagnetisch erregten Körpern thatsächlich beobachten. Wir beachten zunächst, dass sich unsere wirklichen Beobachtungen beschränken auf Systeme, welche dem statischen oder stationären Zustand unendlich nahe sind. Für solche Systeme aber ist das Princip von der Erhaltung der Energie allein schon ausreichend, um aus dem Verlust an electromagnetischer Energie bei jeder eintretenden Verschiebung eindeutig die Grösse der widerstrebenden mechanischen Kraftcomponente zu berechnen, und es darf als bereits erwiesen angesehen werden, dass die so

1) v. Helmholtz, Wied. Ann. 13. p. 400. 1881.

2) Die Vorzeichen bleiben entgegengesetzt, weil bei v. Helmholtz ein Zug, bei uns ein Druck als positiv gerechnet ist.

berechneten Kraftcomponenten mit den beobachteten übereinstimmen. Ein System der Kraftcomponenten, welches dem Princip von der Erhaltung der Kraft genügt, wird nun sicherlich angegeben durch die Resultanten der gefundenen Drucke, es muss also dies eine System eben dasjenige sein, welches auch unmittelbar aus jenem Princip berechnet wird und welches sich im Einklang mit der Erfahrung findet. Um auch a posteriori zu dem gleichen Ergebniss zu gelangen, beachten wir, dass unter den Verhältnissen der Wirklichkeit die electrodynamischen Drucke viel zu schwach sind, um merkliche Deformationen der Volumenelemente fester Körper hervorzurufen. Die äusserst schwachen Verzerrungen, welche sie hier zu Stande bringen, pflegen wir im Gebiet der Electricität als Erscheinungen der Electrostriction von denen der eigentlichen Electrodynamik zu sondern. Sehen wir also von dieser besonderen Klasse von Erscheinungen hier ab, so ist es für den Erfolg gleichgültig, ob wir in festen Körpern die von uns berechneten Drucke annehmen, oder gar keine Drucke, oder beliebige andere von gleicher Grössenordnung. Wir dürfen uns daher allgemein mit den einfacheren Formen (6<sub>b</sub>) begnügen, in welchen nunmehr für krystallinische Körper unter  $\mu$  eine beliebige Constante von der Grössenordnung der  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{12}$ , etc. zu verstehen ist. Aber wir dürfen die Formen (6<sub>b</sub>) sogar weiter vereinfachen, indem wir die mit  $d\mu/d\log\sigma$  behafteten Glieder unberücksichtigt lassen. Denn diese Glieder, welche einen gleichförmigen Druck darstellen, vermögen in tropfbaren Flüssigkeiten bei der geringen Compressibilität derselben keine endlichen Verschiebungen, sondern nur Erscheinungen der Electrostriction bez. Magnetostriction hervorzurufen, und in gasförmigen Körpern fallen diese Glieder fort, weil die Constante  $\mu$  und entsprechend die Dielectricitätsconstante sich hier nicht merklich mit der Dichtigkeit  $\sigma$  ändert. Diejenigen ponderomotorischen Kräfte, welche endliche Verschiebungen der Körper gegen einander hervorrufen, müssen demnach schon dargestellt sein durch die Resultanten des als überall gültig angenommenen Drucksystems:

$$(6c) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_x = \frac{\mu}{8\pi} (-L^2 + M^2 + N^2), \\ Y_y = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 - M^2 + N^2), \\ Z_z = \frac{\mu}{8\pi} (L^2 + M^2 - N^2). \end{array} \right.$$

$$X_y = -\frac{\mu}{4\pi} LM, \quad X_z = -\frac{\mu}{4\pi} NL, \quad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi} MN.$$

Dies vereinfachte System der magnetischen Drucke ist nun aber das Maxwell'sche.<sup>1)</sup> Maxwell hat schon gezeigt, dass dasselbe zusammen mit dem entsprechenden electrischen System die beobachteten ponderomotorischen Kräfte zwischen Magneten, stationären Strömen und electricisirten Körpern enthält, und wir dürfen uns auf seine einfache Darlegung berufen.

Es scheint übrigens nicht bemerkt worden zu sein, dass dies System von Drucken das Innere eines homogenen Körpers, insbesondere des Aethers, im allgemeinen nur dann in Ruhe lässt, wenn die wirkenden Kräfte ein Potential besitzen, also die herrschenden Zustände statische oder stationäre sind. In dem Falle beliebiger zulässiger elektromagnetischer Erregung müssen die gefundenen Drucke das Innere des von uns als beweglich ausdrücklich vorausgesetzten Aethers in Bewegung setzen mit Geschwindigkeiten, welche wir berechnen könnten, wenn wir für die Masse des Aethers einen Anhalt hätten. Dies Resultat scheint wenig innere Wahrscheinlichkeit zu besitzen. Um seinetwillen die Theorie zurückzuweisen, liegt indessen vom Standpunkt der gegenwärtigen Arbeit aus kein Grund vor, denn weder steht das Resultat im Widerspruch mit unseren Voraussetzungen, noch mit der uns zugänglichen Erfahrung. Die geringe Masse der Luft, welche in den bestevacuirten Räumen zurückbleibt, reicht nämlich schon vollständig aus, um alle im Inneren dieser Räume mit vorhandenen Mitteln zu erregenden Strömungen auf einer unmerklichen Grösse zu halten.

1) Maxwell, Treat. on electr. and magnet. 1873. 2. p. 256. Die Vorzeichen sind dort umgekehrt, weil bei Maxwell ein Zug, bei uns ein Druck als positiv gerechnet ist.



Zum Schluss wünsche ich nochmals hervorzuheben, dass ich der hier vorgetragenen Theorie einen Werth nur vom Standpunkt der systematischen Ordnung aus beilege. Die Theorie zeigt, wie wir die elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern vollständig behandeln können unter gewissen Beschränkungen, welche wir übrigens willkürlich uns selbst auferlegten. Dass diese Beschränkungen dem Falle der Natur entsprechen, ist wenig wahrscheinlich. Die richtige Theorie dürfte vielmehr eine solche sein, welche in jedem Punkte die Zustände des Aethers von denen der eingebetteten Materie unterscheidet. Die Aufstellung einer dieser Anschauung entsprechenden Theorie aber schien mir zur Zeit mehr und willkürlichere Hypothesen zu erfordern, als die der hier vorgetragenen Theorie.

Bonn, September 1890.

## II. Ueber electrische Schwingungen in geraden Leitern; von J. Stefan.

(Aus den Sitzungsber. der kais. Acad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Cl. Bd. 99, Abth. IIa. vom 24. April 1890; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Vertheilung eines constanten electrischen Stromes in einem Leiter oder die Verzweigung eines solchen in mehreren Leitern geschieht in der Weise, dass bei gleicher Grösse des gesammten Stromes die durch das Gesetz von Joule bestimmte Wärmeentwicklung ein Minimum wird. Dieser Satz ist von Kirchhoff für Leiter von beliebiger Gestalt bewiesen worden. Demselben entspricht es zum Beispiel, dass ein constanter Strom über den ganzen Querschnitt eines Leitungsdrahtes, den er durchfliesst, in gleichförmiger Dichtigkeit sich vertheilt.

Dieser Satz gilt jedoch nur, wenn die einzelnen Theile der Leitung keine eigenthümlichen electromotorischen Kräfte enthalten, er gilt deshalb nicht für veränderliche Ströme, welche von inducirenden Kräften in den Leitern begleitet sind. Bei Strömen von rapider Veränderlichkeit, im besonderen bei periodischen Strömen von hoher Schwingungszahl, tritt der Einfluss, welchen die Widerstände auf die Stromvertheilung nehmen, hinter jenen der Inductionswirkungen zurück, und zwar bei periodischen Strömen um so mehr, je höher die Schwingungszahl wird. Bei der Lösung mancher Fragen, welche sich auf das Verhalten solcher Ströme beziehen, kann man von dem Widerstande der Leiter ganz absehen und die Gleichungen anwenden, welche für Ströme in Leitern ohne Widerstand gelten. Auf diese Gleichungen und ihre Anwendung ist zuerst von G. Lippmann<sup>1)</sup> hingewiesen worden.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich folgender Satz: Die Vertheilung oder Verzweigung eines veränderlichen Stromes geschieht in der Weise, dass für jede Zeit bei gleicher

1) G. Lippmann, Compt. rend. 109. p. 251. 1889.

Grösse des gesammten Stromes die electrodynamische Energie desselben ein Minimum ist.

Bezeichnet man die Stromstärken in zwei Zweigen, welche unter dem Einflusse derselben electromotorischen Kraft  $E$  stehen, mit  $i_1$  und  $i_2$ , die Widerstände der Zweige mit  $w_1$  und  $w_2$ , ihre Coëfficienten der Selbstinduction mit  $L_1$  und  $L_2$  und endlich den Coëfficienten ihrer gegenseitigen Induction mit  $M$ , so gelten die Gleichungen:

$$E = w_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = w_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Lässt man die mit den Widerständen multiplicirten Glieder weg, so bleibt die Gleichung:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Enthalten die Ausdrücke für  $i_1$  und  $i_2$  kein von der Zeit unabhängiges Glied, so kann man diese Gleichung, da die Inductionscoëfficienten als constante Grössen vorausgesetzt sind, durch:

$$L_1 i_1 + M i_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

ersetzen und diese drückt die Bedingung aus, unter welcher das Trinom:

$$T = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + L_2 i_2^2)$$

für einen vorgeschriebenen Werth von  $i_1 + i_2$  ein Minimum wird. Das Trinom  $T$  kann als die electrodynamische Energie der zwei Ströme  $i_1$  und  $i_2$  bezeichnet werden. Es ist also der oben aufgestellte Satz zunächst für eine aus zwei Theilen bestehende Verzweigung gewonnen. In derselben Weise lässt sich aber die Rechnung für beliebig viele Zweige führen, also auch für die unendlich vielen unendlich dünnen Fäden, in welche man sich einen Leitungsdraht zerlegt denken kann.

Die electrodynamische Energie eines Stromes oder eines Stromsystems lässt sich auch als eine magnetische Energie darstellen, welche in der Magnetisirung der Leiter und des dieselben umgebenden Mediums ihren Grund hat. Man kann also auch sagen: Die Vertheilung der Ströme erfolgt in der Art, dass bei gleicher Grösse des gesammten Stromes seine magnetische Energie ein Minimum wird. Diese Formuli-

zung des Principis bietet den Vortheil, dass sie die Lösung mehrerer Aufgaben ohne jede Rechnung gestattet.

In einem geraden Leiter von kreisförmigem Querschnitt, welcher keinen seitlichen Einwirkungen ausgesetzt ist, können sich electricische Ströme nur symmetrisch um die Axe vertheilen. Wie nun auch die Stromdichte von der Axe gegen die Oberfläche hin variiren mag, der Leiter wirkt nach aussen magnetisch so, als ob der ganze Strom in der Axe concentrirt wäre. Das Minimum der magnetischen Energie ist also dadurch bestimmt, dass dieselbe in dem vom Leiter erfüllten Raume den kleinsten Werth erhält. Dieser kleinste Werth, und zwar der Werth Null, wird dann erreicht, wenn der ganze Strom in einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche des cylindrischen Leiters condensirt ist, denn eine solche Stromröhre übt in dem von ihr umschlossenen Raume keine magnetische Kraft aus.

Ist der Querschnitt des Leiters nicht kreisförmig, so gibt es gleichfalls eine Vertheilung des Stromes in der Oberfläche, welche seine magnetische Wirkung in jedem inneren Punkte der Null gleich macht und dem Principe des Minimums der magnetischen Arbeit entspricht. Diese Vertheilung ist conform derjenigen, welche eine electricische Ladung annimmt, wenn sie sich auf dem Leiter im Zustande des Gleichgewichtes befindet. So wie die Resultante der electricischen Kräfte einer solchen Ladung in jedem Punkte des Leiters Null ist, ist dies auch für die Resultante der magnetischen Kräfte der verschiedenen in der Oberfläche liegenden Stromfäden der Fall, wenn die Stromdichtigkeit längs der Umfangslinie in derselben Weise variirt, wie die Dichtigkeit der statischen electricischen Ladung. Ist z. B. der Querschnitt des Leiters von einer Ellipse begrenzt, so werden die Stromdichten in den verschiedenen Punkten dieser Ellipse sich verhalten wie die Perpendikel, welche auf die zu diesen Punkten gehörigen Tangenten aus dem Mittelpunkte gefällt werden.

In seinen zuletzt veröffentlichten Versuchen hat Hertz<sup>1)</sup> sehr auffallende Belege dafür geliefert, dass electricische

1) Hertz, Wied. Ann. 37. p. 395. 1889.

Schwingungen von sehr hoher Schwingungszahl nur längs der Oberfläche der Leiter sich bewegen. Aus seinen Beobachtungen über solche Bewegungen in einem streifenförmigen Leiter geht auch hervor, dass die Stromdichtigkeit in den Rändern des Streifens eine sehr viel grössere ist, als in der Mitte der breiten Seitenflächen desselben.

Die Gleichungen, aus welchen das Princip der Stromvertheilung abgeleitet wurde, enthalten die Voraussetzung, dass die Stromstärke in jedem Faden des Leiters zu jeder Zeit nach seiner ganzen Länge denselben Werth besitze. Diese Voraussetzung ist wenigstens sehr nahe erfüllt bei der Entladung von Condensatoren durch kurze Leitungsdrähte und auch bei den Schwingungen in den Oscillatoren von Hertz, sie ist es aber nicht in dem Falle der Fortpflanzung von electrischen Wellen in langen Drähten. Man kann jedoch das Princip der Stromvertheilung auch auf solche Fälle anwenden, und zwar mit desto grösserer Annäherung, je länger die Wellen im Vergleiche zu den Querdimensionen des Leiters sind. Die Wirkung der Selbstinduction in einem Stücke des Leiters rührt zum grössten Theile ihres Betrags von der Variation des Stromes in diesem Stücke selbst ab und innerhalb eines solchen Stückes kann immerhin die Stromintensität als nach der ganzen Länge desselben gleich angenommen werden.

Die angegebene Vertheilung der Ströme in der Oberfläche eines Leiters hat zur Folge, dass die Selbstinduction in dem Leiter unabhängig wird von der magnetischen Beschaffenheit seiner Substanz. Die Schwingungsdauer der Oscillationen einer Entladung wird daher dieselbe sein, mag der Condensator durch einen Eisendraht oder durch einen gleichgestalteten Kupferdraht entladen werden. Ebenso kann man schliessen, dass sich electrische Wellen von hoher Schwingungszahl in einem Eisendrahte mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen, wie in einem Kupferdrahte. Nach den Versuchen von Hertz ist dies thatsächlich der Fall. Nach Hertz wäre diese Thatsache nur so zu deuten, dass der Magnetismus des Eisens so schnellen Schwingungen nicht zu folgen vermag. Nach dem hier Vorgetragenen liegt die Sache viel einfacher, das Innere des Eisendrahtes

bleibt von jeder magnetischen Einwirkung dieser Schwingungen frei.

Ist  $i_2$  die Intensität eines Stromes, welcher in einem Leiter von einem anderen Strome  $i_1$  inducirt wird, so besteht die Gleichung:

$$0 = w_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Mit Vernachlässigung von  $w_2 i_2$  und unter der Voraussetzung, dass die Ausdrücke für  $i_1$  und  $i_2$  keine von der Zeit unabhängigen Glieder enthalten, verwandelt sich diese Gleichung in:

$$0 = L_2 i_2 + M i_1$$

und diese drückt die Bedingung aus, unter welcher die electrodynamische Energie  $T$  der beiden Ströme für einen gegebenen Werth von  $i_1$  ein Minimum wird.

Wird ein veränderlicher Strom durch einen Draht geschickt, welcher von einer concentrischen Metallröhre isolirt umgeben ist, so wird in dieser Röhre ein Strom inducirt. Die Richtung und Grösse, sowie die Vertheilung dieses Stromes lässt sich aus diesem Princip unmittelbar ableiten. Das Minimum der electrodynamischen oder magnetischen Energie der beiden Ströme wird bei folgender Anordnung derselben erreicht. Der centrale Strom ist in einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche seines Leiters condensirt. Der inducirte Strom fliesst in einer unendlich dünnen Schicht an der inneren Fläche der Röhre und hat in jedem Zeitpunkte dieselbe Intensität, wie der Strom im Mitteldrahte, aber die entgegengesetzte Richtung. Bei dieser Anordnung sind nur in dem Raume zwischen der Oberfläche des Drahtes und der inneren Wandfläche der Röhre magnetische Kräfte thätig. Das Innere des Drahtes, sowie der von der Substanz der Röhre erfüllte, aber ausserdem noch der ganze äussere Raum sind von magnetischen Kräften frei.

Die den Draht umschliessende Röhre hebt auch seine inducirende Wirkung im ganzen äusseren Raume auf, sie bildet einen vollkommenen Schirm für die inducirenden, wie für die magnetischen Kräfte des von ihr umhüllten Drahtes. Die Schirmwirkung der Röhre besteht nach dieser Darstellung also darin, dass die Wirkungen des centralen Stromes



durch jene des inducirten Stromes in der Röhre aufgehoben werden.

Dieser Fall steht in vollständiger Analogie mit dem electrostatischen Probleme der Vertheilung der Electricität auf zwei concentrischen Cylindern, von welchen der innere isolirt, der äussere zur Erde abgeleitet ist. In derselben Weise ist die Aufgabe auch dann, wenn der Draht und die Röhre nicht concentrisch sind, und auch andere als kreisförmige Querschnitte haben, durch die analoge Aufgabe der Electrostatik gelöst. Die Schirmwirkung der Röhre bleibt auch unter diesen veränderten Bedingungen eine vollkommene.

Der inducirte Strom der Röhre wirkt auch auf den primären Strom im Mitteldrahte ein. Diese Einwirkung besteht darin, dass durch die Einschränkung des magnetischen Feldes auf den Raum zwischen der Oberfläche des Drahtes und der inneren Fläche der Röhre die Selbstinduction des primären Stromes bedeutend vermindert wird. Der Coëfficient der Selbstinduction eines geraden cylindrischen Drahtes von der Länge  $l$  und dem Radius  $a$  ist durch  $2l \log(2l/ac)$  bestimmt. Dabei ist vorausgesetzt, dass  $a$  klein gegen  $l$  ist und der Strom in einer sehr dünnen Schicht an der Oberfläche des Drahtes condensirt ist. Für einen geradlinig gespannten Draht ist  $c =$  der Basis der natürlichen Logarithmen  $= e$ , wenn man zur Berechnung die Formel von F. Neumann verwendet. Nach der Formel von W. Weber ist  $c = e^2$ , nach der electromagnetischen Theorie der Induction ist  $c = e^{1/2}$ . Für einen kreisförmig gebogenen Draht, dessen Enden einander sehr nahe liegen, ist nach allen drei Theorien  $c = \pi e^2/2$ . Wird der Draht mit einer Röhre vom Radius  $b$  concentrisch umhüllt und ist auch  $b$  sehr klein gegen  $l$ , so ist der Coëfficient der Selbstinduction auf  $2l \log(b/a)$  reducirt

Wird einem stromführenden Leiter ein zweiter parallel gestellt, so vertheilen sich der primäre Strom in der Oberfläche des ersten und der inducirte in jener des zweiten ebenso, wie sich eine gegebene electrische Ladung und die inducirte Ladung auf dem zweiten Leiter vertheilen, wenn letzterer zur Erde abgeleitet ist. Hat der erste Leiter einen kreisförmigen Querschnitt, so ist doch der Strom über seine

Oberfläche nicht gleichförmig vertheilt, sondern hat an der dem benachbarten Leiter zugewendeten Seite eine grössere Dichte als an der abgewendeten. Auch ein solcher Leiter, welcher den primären nicht rings umschliesst, übt eine theilweise Schirmwirkung aus, und zwar um so mehr, je ausgedehnter er ist.

Die Condensation einer veränderlichen electricischen Bewegung auf eine unendlich dünne Schicht in der Oberfläche des Leiters bildet ebenso wie die gleichförmige Vertheilung der Bewegung über den ganzen Querschnitt einen idealen Grenzfall. Je nach dem Grade der Variabilität der Bewegung und der Grösse des specifischen Widerstandes des Leiters nähert sich der wirkliche Vorgang mehr dem einen oder dem anderen dieser beiden Fälle. Die Vertheilung eines veränderlichen Stromes in einem geraden Leiter von kreisförmigem Querschnitt ist schon von Maxwell berechnet und diese Rechnung von Lord Rayleigh insbesondere mit Rücksicht auf periodische Ströme ergänzt worden. Ich habe mich mit derselben Aufgabe in der Abhandlung: „Ueber veränderliche electricische Ströme in dicken Leitungsdrähten“<sup>1)</sup> beschäftigt. Meine Darstellung des Problems unterscheidet sich von den früheren dadurch, dass sie nicht von der Maxwell'schen Theorie des electromagnetischen Feldes ausgeht, sondern von den Formeln, welche F. Neumann und W. Weber für das electrodynamische Potential zweier Stromelemente aufgestellt haben. Aus diesen ergibt sich unmittelbar die Bestimmungsgleichung für die Dichtigkeit des Stromes in jedem der unendlich dünnen Fäden, in welche man sich den Leiter zerlegt denken kann. Für einen Draht von kreisförmigem Querschnitt ist unter der Voraussetzung, dass die Strömung symmetrisch um die Axe vertheilt ist, die Stromdichtigkeit  $u$  in der Distanz  $r$  von der Axe zur Zeit  $t$  bestimmt durch die Gleichung:

$$(a) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu} \left( \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right),$$

worin  $\sigma$  den specifischen Widerstand des Leiters,  $\mu$  seine magnetische Leitungsfähigkeit bedeutet. Die Gleichung gilt

1) J. Stefan, Wien. Ber. 95. 2. Abth. p. 917. 1887.

unter der Voraussetzung, dass die electromotorische Kraft  $p$  innerhalb des Leiters der Gleichung:

$$(b) \quad \frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} = 0$$

genügt, darin ist der Fall eingeschlossen, dass  $p$  für alle Fäden des Leiters denselben Werth hat, also von  $r$  unabhängig ist.

Zu der für  $u$  gegebenen Differentialgleichung kommt noch eine Bedingung für die Oberfläche des Leiters hinzu. Die ganze um die Axe concentrisch vertheilte Strömung wirkt auf eine Faser in der Oberfläche so inducirend, als wäre sie in der Axe concentrirt. Bezeichnet man mit  $J$  die gesammte Intensität des Stromes im Leiter zur Zeit  $t$  und sind  $p_1$  und  $u_1$  die Werthe von  $p$  und  $u$  für die Oberfläche, also für  $r = a$ , so ist:

$$(c) \quad p_1 = l \sigma u_1 + 2l \log \frac{2l}{ac} \frac{dJ}{dt}.$$

Ist der Leiter eine Röhre,  $a_0$  der innere Radius derselben, so kommt für  $r = a_0$  noch die Bedingung hinzu:

$$(d) \quad \frac{dp}{dr} = l \sigma \frac{du}{dr}.$$

Man kann der Gleichung (c) noch eine andere Gestalt geben. Die Gleichung (a) kann man in der Form:

$$r \frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right)$$

schreiben. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit  $2\pi dr$  und integrirt über den ganzen Querschnitt, so erhält man:

$$(e) \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{\sigma}{2\mu} \left( r \frac{du}{dr} \right),$$

worin auf der zweiten Seite für die eingeklammerte Grösse die Differenz der Werthe, die sie für  $r = a$  und  $r = a_0$  annimmt, zu setzen ist. Setzt man diesen Werth von  $dJ/dt$  in die Gleichung (c) ein, so enthalten die Bedingungsgleichungen nur mehr die Werthe von  $u$  und seiner ersten Differentialquotienten nach  $r$ .

Füllt der Leiter den Kreis vom Radius  $a$  voll aus, so entfällt in (e) der untere Grenzwert und es bleibt die Gleichung:

$$(f) \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{a\sigma}{2\mu} \frac{du}{dr} \quad \text{für } r = a \text{ übrig.}$$

Die Gleichungen zur Bestimmung von  $u$  haben dieselbe Form, wie jene zur Bestimmung der Temperatur in einem Drahte, welchem Wärme nur durch die Oberfläche zugeführt oder entzogen werden kann. Diese Analogie zwischen den Gleichungen bedingt auch eine solche zwischen den thermischen und electrischen Vorgängen.

Wird ein galvanisches Element geschlossen, so verbreitet sich der Strom im Schliessungsdrahte in derselben Art wie die Wärme, wenn der Draht plötzlich aus einem Raume von tieferer in einen solchen von höherer Temperatur versetzt wird. Der Strom beginnt in der Oberfläche des Leiters zu fließen und erreicht hier zuerst seine definitive Dichtigkeit, später erst in den tieferen Schichten, zuletzt im centralen Faden. Der Ausgleich der Stromdichte vollzieht sich um so rascher, je grösser der specifische Widerstand des Leiters ist, er geht in magnetisirbaren Drähten sehr viel langsamer vor sich als in unmagnetischen. Wird z. B. zur Schliessung des Elementes ein Eisendraht von 1 m Länge und 1 cm Durchmesser gewählt, so weicht nach 0,01 Secunde die Stromdichte in der Oberfläche von ihrem definitiven Werthe nur um 3 Proc. ab, in der Mitte des Drahtes aber hat sie zu dieser Zeit nur die Hälfte des definitiven Werthes. Bei dieser Rechnung wurde der specifische Widerstand des Eisens = 9900, seine magnetische Leitungsfähigkeit = 150 angenommen. Die Verschiedenheit der Stromentwicklung in den äusseren und inneren Theilen des Drahtes ist so gross, dass ihr experimenteller Nachweis nicht sehr schwierig wäre. In unmagnetischen Drähten ist dieselbe bei gleichem Durchmesser sehr viel kleiner.

Wird ein Draht in einen Raum gebracht, dessen Temperatur periodisch wechselt, so stellt sich ein Beharrungszustand der Temperaturvertheilung im Drahte ein, derart, dass die Temperatur desselben in allen Schichten die periodischen Schwankungen der äusseren Temperatur mitmacht. Die Amplituden der Schwankungen nehmen jedoch gegen die Axe hin ab, und zwar um so rascher, je kürzer die Periode dieser Schwankungen ist. Zugleich haben diese in verschiedenen Schichten verschiedene Phasen, sodass die Maxima zum Beispiel in einer Schicht um so später auftreten, je

weiter diese Schicht von der Oberfläche entfernt ist. Dieselben Eigenschaften zeigt auch der Gang der Temperatur in verschiedenen Tiefen des Erdbodens im Vergleiche zu den täglichen und jährlichen Schwankungen der Temperatur an der Oberfläche der Erde.

In derselben Weise stellt sich der periodische Beharungszustand der electrischen Bewegung in einem Leitungsdrahte her, wenn in diesem eine periodische electromotorische Kraft thätig ist. Für einen Eisendraht von 4 mm Dicke gibt die Rechnung für den Fall, dass der Strom in demselben 250 ganze Schwingungen in der Secunde macht, die Amplitude der Schwingungen in der Oberfläche 2,52 mal so gross, als in der Axe. Für 500 Schwingungen steigt diese Zahl auf 5,86, für 1000 auf 20,59. Die Stromschwingung in der Axe hat gegen jene in der Oberfläche in diesen drei Fällen die Phasendifferenzen  $116^{\circ} 2'$ ,  $174^{\circ} 50'$  und  $215^{\circ} 38'$ . Dieselben Verhältnisse gelten für einen Kupferdraht von fünfmal grösserer Dicke, oder bei gleicher Dicke für 25 mal höhere Schwingungszahlen.

Je höher die Schwingungszahl wird, desto grösser wird die Verdichtung der electrischen Bewegung an der Oberfläche. Für eine Schwingungszahl von 50 Millionen findet man, dass in einem Eisendraht die Amplitude der Schwingungen in 0,0085 mm Tiefe 100 mal kleiner ist als in der Oberfläche. In der Tiefe von 0,0058 mm beträgt die Verzögerung in der Phase gegen die Oberfläche eine halbe Schwingungsdauer. In dieser Tiefe hat der Strom in jedem Augenblicke die entgegengesetzte Richtung und eine 23 mal kleinere Amplitude als in der Oberfläche. In einem Kupferdraht sind die Tiefen mit den angeführten Eigenschaften fünfmal, für einen Neusilberdraht 18 mal grösser als die für den Eisendraht angegebenen.

Diese Art der Stromvertheilung hat zur Folge, dass ein Draht für solche Schwingungen einen ganz anderen Widerstand und eine andere Selbstinduction äussert, als für gewöhnliche Ströme. Die Formeln, welche zur Berechnung dieser Grössen für kleinere Werthe der Schwingungszahlen benutzt werden können, habe ich in der angeführten Abhandlung entwickelt. Für sehr grosse Werthe der Schwingungs-

zahl sind diese Formeln wegen ihrer geringen Convergenz nicht geeignet. Es kann aber für diesen Fall die Bestimmungsgleichung für die Stromdichtigkeit  $u$  in der Form:

$$(g) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu} \left( \frac{d^2u}{dz^2} - \frac{1}{a} \frac{du}{dz} \right)$$

verwendet werden, wenn  $a$  den Radius des Drahtes und  $z$  die Tiefe einer Schicht unter der Oberfläche bedeutet. Anstatt  $a$  sollte in der Gleichung  $a - z$  geschrieben werden. Da aber  $u$  schon für kleine Werthe von  $z$  sehr klein wird, so ist die angenommene Vereinfachung der Gleichung zulässig, sobald  $a$  selbst nicht sehr klein ist.

Ein Integral dieser Gleichung ist:

$$u = e^{-gz} \sin(\gamma t - hz).$$

Dasselbe gibt für  $z = 0$  die Stromdichtigkeit  $u_1 = \sin \gamma t$  und stellt für grosse Werthe von  $\gamma$  die Abnahme von  $u$  mit wachsendem  $z$  mit hinreichender Genauigkeit dar. Die Constanten  $g$  und  $h$  sind durch die Gleichungen:

$$g^2 - h^2 + \frac{g}{a} = 0, \quad 2gh + \frac{h}{a} = \frac{4\pi\mu\gamma}{\sigma}$$

bestimmt.

Man kann nun die Gleichung (f), welche für die Coordinate  $z$  die Form:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{a\sigma}{2\mu} \frac{du}{dz}$$

für  $z = 0$  annimmt, benutzen, um einen Ausdruck für die Intensität des Gesamtstromes herzustellen. Es ist:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{a\sigma}{2\mu} (g \sin \gamma t + h \cos \gamma t)$$

also:

$$J = \frac{a\sigma}{2\mu\gamma} (h \sin \gamma t - g \cos \gamma t).$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$\gamma h J + g \frac{dJ}{dt} = \frac{a\sigma}{2\mu} (g^2 + h^2) \sin \gamma t = \frac{a\sigma}{2\mu} (g^2 + h^2) \cdot u_1.$$

Nimmt man daraus den Werth von  $u_1$  und setzt denselben in die Bedingungsgleichung (c), so folgt:

$$p_1 = \frac{2l\mu\gamma h}{a(g^2 + h^2)} J + \left[ 2l \log \frac{ac}{2l} + \frac{2l\mu g}{a(g^2 + h^2)} \right] \frac{dJ}{dt}.$$

Für den Fall, dass  $p$  im ganzen Querschnitt des Drahtes denselben Werth hat, gibt diese Gleichung die Beziehung

zwischen der electromotorischen Kraft  $p$  und der Intensität des Gesamtstromes  $J$ . Man kann also den Factor von  $J$  in dieser Gleichung als den Widerstand, den Factor von  $dJ/dt$  als den Coëfficienten der Selbstinduction des Drahtes bezeichnen.

Bezeichnet man diesen Widerstand mit  $w'$ , den gewöhnlichen mit  $w$ , so ist annähernd:

$$w' = w \left( \pi a \sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}} + \frac{1}{4} \right).$$

Darin bedeutet  $n$  die Schwingungszahl des periodischen Stromes, welche mit  $\gamma$  durch die Gleichung  $\gamma = 2n\pi$  verbunden ist. Für sehr grosse Werthe von  $\gamma$  reducirt sich diese auf die schon von Lord Rayleigh angegebene Formel:

$$w' = w \cdot \pi a \sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}}.$$

Für eine Schwingungszahl  $n = 50 \cdot 10^6$  und  $a = 0,2$  wird für einen Kupferdraht, wenn  $\sigma = 1650$  angenommen wird,  $w' = 109w$ . Für einen Eisendraht ist das Verhältniss von  $w'$  zu  $w$  noch viel grösser. Die mit einer periodischen Entladung verbundene Wärmeentwicklung ist für jedes Zeitelement  $dt$  durch  $w' J^2 dt$  bestimmt. Zur Beurtheilung ihrer Wirkung auf den Leitungsdraht und seine Umgebung ist es wichtig, zu beachten, dass die ganze Wärmeentwicklung auf eine sehr dünne Schicht an der Oberfläche des Drahtes beschränkt ist.

Der Coëfficient der Selbstinduction kann durch:

$$L' = 2l \left( \log \frac{2l}{ac} + \frac{1}{4\pi a} \sqrt{\frac{\mu\sigma}{n}} \right)$$

dargestellt werden. Mit wachsendem  $n$  wird  $L'$  immer kleiner und nähert sich dem Werthe als Grenze, welchen dieser Coëfficient annimmt, wenn der Strom in der Oberfläche condensirt ist. Dieser Werth ist auch nur wenig von jenem verschieden, welcher unter der Voraussetzung, dass der Strom den ganzen Querschnitt gleichförmig erfüllt, gefunden wird. Dieser letztere Werth ist nämlich:

$$L_0 = 2l \left( \log \frac{2l}{ac} - \frac{1}{4} \right).$$



Diese Eigenschaft des Inductionscoëfficienten hat zur Folge, dass die Theorie der oscillatorischen Entladungen, obwohl diese ganz anders geschehen, als bei der Berechnung derselben vorausgesetzt wurde, für die Schwingungsdauer doch Resultate liefert, die mit den Beobachtungen stimmen, so lange der Widerstand ohne merklichen Einfluss auf die Oscillationsdauer bleibt.

Insofern man das Innere eines Leiters einer rasch oscillirenden Bewegung als stromlos betrachten darf, kann man auch sagen, dass sich im Inneren die äussere electromotorische Kraft und jene der Selbstinduction des Leiters das Gleichgewicht halten. Dieses Gleichgewicht bleibt bestehen, wenn ein etwa durch zwei concentrische Flächen begrenztes Stück des Leiters ausgeschnitten wird, sobald die in diesem Stück vorhandene Strommenge verschwindend klein ist. Der centrale Theil des Leiters wird stromlos bleiben oder der äussere Mantel bildet für ihn einen Schirm gegen die äussere electromotorische Kraft.

Ein röhrenförmiger Leiter übt in allen im Inneren der Höhlung gedachten Fäden eine gleich grosse Induction aus, wie in einem Faden der inneren Oberfläche. Ihre Wirkung zusammen mit jener der äusseren electromotorischen Kraft ist durch  $l\sigma u_0$  bestimmt, wenn  $u_0$  die Stromdichtigkeit in der inneren Oberfläche bedeutet.  $l\sigma u_0$  gibt daher auch die auf einen in der Höhlung gelegenen Faden wirkende, totale electromotorische Kraft und diese wird sehr klein, sobald  $u_0$  sehr klein ist. Da die Amplitude der Stromdichtigkeit von der Oberfläche einwärts annähernd nach dem Gesetz  $e^{-gz}$  abnimmt und für grosse Werthe der Schwingungszahl auch  $g$  einen grossen Werth erhält, so wird, wie schon oben angegeben worden ist, schon für kleine Werthe von  $z$  ein sehr kleiner Werth für  $u_0$  resultiren. Es genügt eine sehr geringe Dicke der Röhrenwand zu einer nahezu vollständigen Schirmwirkung.

Wird ein stromführender Leiter von einer concentrischen Röhre umgeben, so nimmt die Dichtigkeit des in der Röhre inducirten Stromes von der inneren gegen die äussere Wand derselben ab. Auf einen Faden in der äusseren Oberfläche wirken der gegebene und der inducirte Strom so, als ob

beide in der Mittellinie concentrirt wären. Bezeichnet man die Intensität des gegebenen Stromes mit  $J'$ , jene des inducirten mit  $J$ , die Stromdichtigkeit in der äusseren Oberfläche mit  $u_1$ , so hat man zur Bestimmung von  $u_1$  die Gleichung:

$$-2l \log \frac{2l}{ac} \left( \frac{dJ}{dt} + \frac{dJ}{dt} \right) = l \sigma u_1.$$

Auf einen Faden, welcher sich ausserhalb der Röhre in der Distanz  $b$  von der Mittellinie befindet, ist die inducierende Wirkung des Systems:

$$-2l \log \frac{2l}{bc} \left( \frac{dJ}{dt} + \frac{dJ}{dt} \right).$$

Dieselbe ist auch in diesem Falle durch die Stromdichte  $u_1$  in der Grenzfläche bestimmt. Diese ist das Maass für den Grad der Schirmwirkung, mit welcher die Röhre den äusseren Raum gegen die Induction des eingeschlossenen Stromes schützt.

Für so hohe Schwingungszahlen, wie sie bei den oscillatorischen Entladungen vorkommen, schliesst sich das Verhalten der metallischen Leiter sehr nahe an die Gesetze an, welche für Leiter ohne Widerstand gelten. Bei den electrolytischen Leitern, deren specifischer Widerstand sehr gross ist, verhält sich die Sache anders. Nach Kohlrausch ist das Leitungsvermögen der bestleitenden Schwefelsäure von 1,22 specifischem Gewichte  $= 69 \cdot 10^{-6}$  bezogen auf das Leitungsvermögen des Quecksilbers als Einheit. Da der specifische Widerstand des Quecksilbers  $= 94300$  ist, so ist jener der bezeichneten Schwefelsäure  $= 1366 \cdot 10^6$ . Rechnet man mit diesem Werthe die Stromvertheilung in einer mit dieser Flüssigkeit gefüllten Röhre von 1 cm Durchmesser für den Fall, dass der Strom  $50 \cdot 10^6$  Schwingungen in der Secunde macht, so findet man die Stromdichtigkeit in der Oberfläche nur um 0,8 Proc. höher als in der Axe der Röhre. Die Strömung ist also in diesem Falle nahezu gleichförmig über den Querschnitt vertheilt, während in einem Kupferdrahte die Stromdichtigkeit von der Oberfläche nach einwärts so rasch abfällt, dass sie in 0,003 cm Tiefe über 20mal, in 0,004 cm Tiefe schon 100mal kleiner ist als in der Oberfläche.

Der Unterschied zwischen der Stromdichte in der Oberfläche und in der Axe wird grösser, wenn die Röhre einen grösseren Querschnitt erhält. Bei der angenommenen Schwingungszahl von 50 Millionen wird die Amplitude der Stromdichte in der Oberfläche sechsmal grösser als in der Axe bei einem Durchmesser von 5,7 cm. Diese Verhältnisszahl steigt auf 20, wenn der Durchmesser = 8 cm wird. Diese Zahlen geben zugleich eine Vorstellung von der Dicke, welche eine Flüssigkeitsschicht haben muss, wenn sie eine merkliche Schirmwirkung ausüben soll. Diese Dicke wächst mit dem specifischen Widerstande  $\sigma$ , sie nimmt mit der Schwingungszahl  $n$  ab, sie ist der Quadratwurzel aus dem Quotienten von  $\sigma$  und  $n$  proportional.

Zur Beobachtung der Erscheinungen der Schirmwirkung eignen sich sehr gut die electrischen Schwingungen in kurzen geraden Leitern. Ich will hier einige sehr leicht auszuführende Versuche mittheilen.

Der primäre Schwingungsapparat, den ich verwende, besteht aus zwei Messingröhren von je 50 cm Länge und 3,2 cm Durchmesser. Die Röhren sind mit einer Holzleiste durch Träger von Hartgummi verbunden, sodass ihre Axen in eine Linie fallen. Die Axen liegen in einer Höhe von 5 cm über der oberen Fläche der Leiste. Die einander zugewendeten Enden der Röhren sind durch Segmente von Messingkugeln geschlossen. Die Distanz dieser Enden kann variirt werden, indem die Röhren in ihren Trägern verschiebbar sind. Die entfernten Enden der Röhren sind offen. Man kann in dieselben andere Röhren einschieben und so den Apparat auch verlängern. Nahe an den zwei zugekehrten Enden werden um dieselben zwei Schleifen aus dünnem Draht gelegt und diese mit den Polen eines Inductionsapparates verbunden.

Der secundäre Leiter besteht ebenfalls aus zwei Messingröhren von derselben Länge, aber viel kleinerem Durchmesser = 5 mm. Diese beiden Röhren sind ebenso wie die weiten Röhren des primären Leiters auf einer Holzleiste montirt. Ihre benachbarten Enden sind durch Messingkugeln von 8 mm Durchmesser geschlossen; der Abstand derselben kann beliebig klein gemacht werden.

Stellt man die beiden Apparate parallel und lässt in dem primären Funken überschlagen, so treten auch in dem secundären kleine Funken auf. Die Schlagweite dieser Funken nimmt mit der Distanz der beiden Apparate ab, die Funken können aber noch gut beobachtet werden, wenn die Distanz der Apparate 1 m und auch mehr beträgt.

Schiebt man den secundären Leiter in eine aus zusammengerolltem Drahtgeflecht hergestellte Röhre von 100 cm Länge und 10 cm Durchmesser, so kann man die beiden Apparate so nahe aneinander stellen, als es eben angeht; in dem secundären Leiter tritt niemals ein Funke auf. Das Drahtgeflecht, dessen Maschen 4 mm<sup>2</sup> Flächeninhalt haben, schirmt den umhüllten Leiter vollständig gegen die inducierenden Wirkungen des primären Apparates.

Schiebt man über den secundären Leiter statt der einen Röhre von 100 cm Länge zwei solche Röhren von je 50 cm Länge, jedoch so, dass sie in der Mitte nicht zusammenstossen, so verhindern diese Röhren die Funkenerscheinung in dem eingehüllten Leiter nicht. Schiebt man die beiden Röhren ganz aneinander, sodass sie sich in vielen Punkten ihres Umfanges berühren, dann wirken sie ebenfalls als vollständiger Schirm. Ja, es genügt, die Enden der beiden Röhren soweit einander zu nähern, dass an mehreren Stellen Funken zwischen denselben auftreten. Sobald dies der Fall ist, hören die Funken im eingeschlossenen Leiter zu spielen auf. Dieser Versuch lehrt, dass der umhüllende Leiter nur dann einen Schirm für den eingeschlossenen bildet; wenn in beiden Schwingungen derselben Art inducirt werden können.

Der secundäre Leiter wird von der Drahröhre gleicher Länge gegen die inducierenden Wirkungen des primären Apparates auch dann geschirmt, wenn der letztere eine beträchtlich grössere Länge hat, als die beiden ersteren. Es treten aber in diesem Falle sofort Funken im secundären Leiter auf, wenn man ihn an den Enden ableitend berührt. Sind der primäre Apparat und die Drahröhre gleich lang, der secundäre Leiter aber länger, sodass er auf beiden Seiten aus der Röhre hinausragt, so schwächt die Röhre die Funken, sie hebt dieselben aber nicht auf. Der primäre Leiter

inducirt in dem secundären immer Schwingungen, mögen die beiden gleiche oder verschiedene Längen haben. Eine Röhre schirmt den eingeschlossenen secundären Leiter vollkommen gegen die Induction des primären, wenn sie ebenso lang oder länger ist als der eingeschlossene Leiter, nicht aber, wenn sie kürzer ist. Eine Röhre hebt auch in einem secundären Leiter, welcher spiralförmig gewunden ist, die Funken auf, wenn der primäre Apparat, die Axe der Spirale und die Röhre gleiche Längen haben.

Man kann bei solchen Versuchen auch Blechtafeln statt der Drahröhren verwenden. Stellt man den primären und secundären Apparat in einer Distanz von etwa 20 cm parallel, so hebt eine zwischen beide gestellte Tafel aus dünnem Zinkblech von 1 m Länge und 10 cm oder grösserer Höhe die Induction in dem secundären Leiter so weit auf, dass die früher lebhaften Funken verschwinden. Nimmt man statt der einen Tafel zwei von je 50 cm Länge, so bilden sie keinen Schirm, so lange sie sich nicht berühren oder wenigstens nicht so nahe aneinander gerückt sind, dass zwischen mehreren Punkten derselben sich Funken zeigen.

Die in einer solchen Tafel inducirten Schwingungen wirken nicht nur hinter, sondern auch vor der Tafel entgegengesetzt jenen des primären Apparates. Wird die Tafel knapp hinter dem secundären Leiter aufgestellt, so hebt sie ebenfalls die Funken in demselben auf. Dies thun auch die zwei Tafeln von halber Länge, wenn sie sich berühren, nicht aber, wenn sie getrennt sind. Es gilt auch für die Reflexion der electricischen Schwingungen der Satz, dass eine solche nur stattfindet, wenn in dem Reflector solche Schwingungen inducirt werden können oder die reflectirten Inductionswirkungen sind die Wirkungen der Schwingungen, welche in der Oberfläche des reflectirenden Leiters inducirt werden.

Statt der Blechtafeln kann man zu diesen Versuchen auch Tafeln aus Drahtnetz nehmen. Auch Systeme von parallel gespannten Drähten verhalten sich, wie Hertz gezeigt hat, wie flächenförmige Leiter. Solche Drähte üben aber nur dann eine Schirmwirkung aus, wenn der primäre Leiter in ihnen ebensolche Ströme, wie in dem zu schirmen-

den Leiter in genügender Intensität induciren kann. Sie bilden keinen Schirm, wenn sie senkrecht zu den beiden Leitern gestellt werden.

Der primäre Leiter wirkt auf den zweiten nicht bloss dann inducirend, wenn die beiden parallel stehen, sondern auch in anderen Lagen, auch wenn sie gegen einander senkrecht gestellt werden, in diesem Falle nur dann nicht, wenn sie eine symmetrische Figur bilden. Stellt man die beiden Leiter parallel und dreht dann den secundären Leiter um seinen Endpunkt, so treten in ihm in allen Lagen Funken auf, wenn man die Drehung bis zu einem Winkel von  $180^\circ$  ausdehnt.

Dieses Verhalten des secundären Leiters entspricht nicht den bekannten Grundsätzen der Electrodynamik. Nach diesen muss die Richtung der Induction im secundären Leiter in der Endstellung die entgegengesetzte von jener in der anfänglichen Stellung sein. Die inducirte electromotorische Kraft muss also in einer zwischen den Stellungen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  gelegenen Richtung des Leiters der Null gleich sein. Nimmt man zur Berechnung der Induction die Potentialformel von F. Neumann, so verschwindet die Induction, wenn die beiden Leiter einen rechten Winkel miteinander bilden. Die Formel von W. Weber gibt den Nullwerth der Induction für einen kleineren Winkel. Dieser Winkel rückt näher gegen  $90^\circ$ , wenn man die Induction entsprechend der electromagnetischen Theorie nach dem arithmetischen Mittel der beiden Formeln rechnet. Diese Rechnung entspricht der Annahme, dass die Induction keine unmittelbare Wirkung zwischen den Leiterelementen ist, sondern durch die Magnetisirung des Mediums vermittelt wird, welches die Leiter erfüllt und umgibt.

Aus den Funken im secundären Leiter kann man jedoch keinen sicheren Schluss über electrodynamische Verhältnisse ziehen, da dieselben nicht nur durch die electrodynamische Induction, sondern auch durch die electrostatische der auf dem primären Leiter vorhandenen periodisch wechselnden Ladung verursacht werden. Man kann diese beiden Wirkungen in einigen Fällen von einander trennen. Stellt man die beiden Leiter gegeneinander senkrecht und schiebt zwi-

schen die benachbarten Enden derselben eine Metallplatte, so hat diese auf die Funkenbildung keinen Einfluss, wenn sie isolirt ist, wohl aber, wenn sie mit der Erde leitend verbunden wird. Die Funken verschwinden dann gewöhnlich, sie treten aber wieder auf, wenn man die Schlagweite im secundären Leiter kleiner macht. Ob in diesem Falle durch die eingeschobene abgeleitete Platte die electrostatische Wirkung ganz aufgehoben wird, die übrigbleibenden kleinen Funken also electrodynamischer Natur sind, ist schwer zu entscheiden. Es ist noch eine genauere Untersuchung der ganzen Frage nothwendig.

In derselben Weise wie in metallischen kann man electriche Schwingungen auch in geraden flüssigen Leitern induciren. Zur Herstellung des secundären Leiters dienen zwei Glasröhren. Die zwei entfernten Enden derselben sind offen und nach aufwärts gebogen, die einander zugewendeten Enden sind geschlossen und enthalten kurze eingeschmolzene Platindrähte, an welche aussen kleine Messingkugeln aufgesteckt werden. Werden die Röhren mit verdünnter Schwefelsäure (14 Volumentheile Wasser, 1 Theil. Schwefelsäure) gefüllt und der so formirte Leiter zum primären parallel gestellt, so treten zwischen den einander hinreichend genäherten Messingkugeln schöne, weisse Funken auf. Man kann die Schwefelsäure noch viel weiter verdünnen, die Funken werden dann immer schwächer und erscheinen endlich nicht mehr als weisse, sondern als röthliche Funken. Auf dieselbe Art kann man auch den primären Leiter durch einen flüssigen ersetzen.

Endlich habe ich auch einen secundären Leiter hergestellt, in welchem die inducirten Funken direct zwischen zwei Flüssigkeitskuppen überspringen. Zwei Glasröhren von je 50 cm Länge und 1 cm Durchmesser sind an je einem Ende zugeschmolzen, an den anderen Enden in kurze, dünnere Röhren ausgezogen. Die beiden Röhren werden mit verdünnter Schwefelsäure vollgefüllt und können horizontal gelegt werden, ohne dass aus den engen offenen Enden Flüssigkeit austritt. Stellt man diesen secundären Leiter parallel dem primären auf und nähert die Kuppen der Flüssigkeit einander bis auf 1 mm, so springen zwischen denselben dünne



röthliche Funken über, die hellglänzend werden, wenn man die Kuppen der Flüssigkeiten einander noch näher bringt. Mit sehr verdünnter Schwefelsäure gelang mir dieser Versuch nicht; wurden die Flüssigkeiten einander immer mehr und mehr genähert, so vereinigten sie sich, ohne dass ich vorher einen Funken beobachten konnte. Ich bemerke noch, dass die Schlagweite des Funkens im primären Apparat gewöhnlich 5 mm, in einzelnen Fällen grösser, bis doppelt so gross gewählt wurde.

Ich habe auch einige Versuche über die Schirmwirkung flüssiger Leiter ausgeführt. Der secundäre Leiter wurde in eine Glasröhre von 1,5 cm äusserem Durchmesser eingeschlossen und in eine weitere Röhre von 6 cm Durchmesser centrirt eingeführt. Der Raum zwischen den beiden Röhren wurde mit Flüssigkeit ausgefüllt. Dieser Apparat hatte nahe dieselbe Länge wie der primäre. Beide wurden in 15 cm Distanz einander parallel, und zwar vertical, aufgestellt. Wurde der Zwischenraum zwischen den beiden Röhren mit Wasser gefüllt, so ging die Funkenbildung im secundären Leiter gerade so vor sich, wie in dem Falle, als dieser Raum mit Luft gefüllt war. Wurde das Wasser mit wenig Schwefelsäure versetzt, so zeigte sich auch keine Aenderung. Schwefelsäure vom specifischen Gewicht 1,011 bewirkte eine merkliche Schwächung. Bei der Anwendung einer Säure vom specifischen Gewicht 1,026 verschwanden die Funken. Ebenso blieben die Funken aus, wenn dichtere Säuren genommen wurden, sie traten aber wieder auf, als der Apparat mit einer sehr hoch concentrirten Säure gefüllt wurde. Der specifische Widerstand der Säure von der Dichte 1,026 ist etwa 4,4mal so gross als jener der am besten leitenden. Nimmt man an, dass die Schwingungen im secundären Leiter seiner Länge als einer halben Welle entsprechen, so ist die Zahl derselben in der Secunde = 150 Millionen. Das Resultat dieses Versuches stimmt also beiläufig mit den oben über das Verhalten der Schwefelsäure angegebenen Daten. Zu einer genauen Vergleichung mit den Formeln, welche man für diese Versuchsanordnung aufstellen kann, fehlt übrigens die Bestimmung des Werthes, auf welchen die inducirende Kraft herabgesetzt werden

muss, damit die Funkenbildung im secundären Leiter verschwindet.

Versuche über die Schirmwirkung electrolytischer Leiter sind schon von J. J. Thomson <sup>1)</sup> nach einer bequemeren Methode ausgeführt worden. Der primäre und secundäre Leiter sind bei seinen Versuchen kreisförmig gebogen, zwischen denselben befindet sich die Flüssigkeit in einer flachen Schale in Form einer Platte. Bei diesen Versuchen bilden die in der Flüssigkeit inducirten Schwingungen geschlossene Ströme, bei meinen Versuchen haben sie offene geradlinige Bahnen.

---

1) J. J. Thomson, Proc. of Roy. Soc. London. 45. p. 269. 1889.

### III. *Ueber die Theorie der oscillatorischen Entladung; von J. Stefan.*

(Aus den Sitzungsber. der kais. Acad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Cl. Bd. 99, Abth. IIa. vom 12. Juni 1890; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Theorie der oscillatorischen Entladung einer Leydener Flasche ist von W. Thomson und Kirchhoff entwickelt worden. Dieselbe liefert für die Intensität des Entladungsstromes eine Gleichung, welche der Form nach mit jener für die Bewegung eines Pendels in einem widerstehenden Mittel übereinstimmt. Bei der Entwicklung dieser Theorie haben W. Thomson und Kirchhoff vorausgesetzt, dass der Entladungsstrom den ganzen Querschnitt des entladenden Drahtes in gleichförmiger Dichtigkeit erfüllt. Diese Voraussetzung weicht jedoch bei so rapid verlaufenden Strömen von der Wirklichkeit sehr weit ab. In solchen Fällen bleibt in einem metallischen Leiter die Bewegung der Electricität nahezu vollständig auf eine sehr dünne, an der Oberfläche des Leiters liegende Schichte beschränkt.

Durch diese Anordnung der Strömung wird der Coëfficient der Selbstinduction des Leiters vermindert, sein Widerstand aber in bedeutendem Maasse vermehrt. Wenn die Aenderung dieser Grössen nur die Folge hätte, dass für dieselben in die Gleichung andere bestimmte Werthe einzusetzen wären, so bliebe dadurch die Theorie in ihrer Wesenheit unberührt. Diese Grössen sind jedoch von der Art der Entladung, insbesondere für eine oscillirende Entladung von der Oscillationsdauer abhängig. Die Rücksichtnahme auf die ungleichförmige Vertheilung des Stromes muss also zu einer Darstellung des Vorganges der Entladung führen, welche von der Pendelbewegung verschieden ist. Die Untersuchung, welche ich über diesen Gegenstand ausgeführt habe, und die ich im Folgenden mitzutheilen mir erlaube, hat auch das wesentliche Resultat ergeben, dass eine oscillatorische Entladung immer aus zwei Bewegungen zusammengesetzt ist, von welchen jedoch die eine viel früher erlischt als die

andere. Die letztere ist es, welche mit wachsender Zeit den Charakter einer Pendelbewegung mit abnehmender Amplitude annimmt.

Die Einschaltung einer Funkenstrecke in den Schliessungsbogen dürfte übrigens gerade für die erste Zeit der Entladung eine viel grössere Abweichung von der Pendelbewegung hervorrufen, als die durch die Theorie angegebene. Diese Abweichung kann nicht ohne Einfluss auf die Inductionswirkungen der Entladung in benachbarten Leitern bleiben. Der Schliessungsbogen oder ein mit ihm verbundener Leiter kann in einem anderen immer electriche Bewegungen induciren, auch wenn die Dauer der Eigenschwingungen des letzteren von der Oscillationsdauer der erregenden Entladung ganz verschieden, eine eigentliche Resonanz also ausgeschlossen ist. Diese Bewegung wird dann noch eine Verstärkung erfahren, wenn der Inductionsstoss in einer den Eigenschwingungen des Leiters entsprechenden günstigen Zeit, z. B. infolge einer Reflexion am Ende des inducirenden Drahtes, sich wiederholt. Darauf, glaube ich, können die von Sarasin und De la Rive gemachten Beobachtungen zurückgeführt werden. Ich will übrigens noch bemerken, dass bei diesen Versuchen die Ebene des kreisförmigen secundären Leiters senkrecht gegen die inducirenden Drähte gestellt war. Die beobachteten Inductionen sind also nicht electrodynamische in gewöhnlichem Sinne, sondern electrostatische, welche durch die auf den Drähten wandernden Ladungen erregt werden.

In der oscillatorischen Entladung zeigt die bewegte Electricität auffallender als in anderen Erscheinungen die Eigenschaft der Trägheit. Es wird auch häufig diese Entladung mit den Schwingungen einer Flüssigkeit in zwei communicirenden Röhren verglichen. Ein solcher Vergleich bietet zunächst nur ein augenfälliges Bild für eine Erscheinung, deren Beobachtung mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Man kann aber diesem Vergleiche mit Hülfe der Beziehung, welche zwischen den Principen der Trägheit und der Energie besteht, noch eine weitere Ausdehnung geben. Die Energie, welche der Höhendifferenz der Flüssigkeit in den zwei communicirenden Röhren entspricht, verwandelt sich

während der Ausgleichung dieser Höhen in lebendige Kraft der Flüssigkeit. Diese lebendige Kraft kann sich wieder in eine Energie der ursprünglichen Art umsetzen, und zwar in der Weise, dass die neue Höhendifferenz gegen die frühere die entgegengesetzte Lage erhält. In der Umsetzbarkeit der beiden Energien ineinander liegt der Grund für die schwingende Bewegung, die sonst auch als eine Folge der Trägheit aufgefasst wird. Wenn infolge von Reibung ein Theil der Energie in Wärme verwandelt wird, welche nicht umsetzbar ist, so werden die Amplituden der Schwingungen immer kleiner. Die Bewegung vollzieht sich so, als hätte die Flüssigkeit keine vollkommene Trägheit.

Der Potentialdifferenz zwischen den Platten eines geladenen Condensators entspricht eine electrostatische Energie. Werden die beiden Platten durch einen Draht verbunden, so verwandelt sich ein Theil dieser Energie wegen des Leitungswiderstandes des Drahtes in Wärme, der übrige Theil aber verwandelt sich in eine andere Energie, welche, wie die Thatsache der oscillatorischen Entladung zeigt, sich wieder in eine electrostatische umsetzen kann, der Art, dass im Condensator eine der ursprünglichen entgegengesetzte Potentialdifferenz entsteht. Es handelt sich nun darum, welcher Art diese umsetzbare Energie ist. In dem besonderen Falle, in welchem der Entladungsdraht in Form einer Spirale um einen Eisenkern geführt wird, ist die Art eines Theiles, und zwar des grössten Theiles dieser Energie bekannt. Es ist die magnetische Energie, welche in dem während des Ausgleiches der Ladungen magnetisirten Eisen sich anhäuft und welche, nachdem der Ausgleich vollzogen ist, noch einen Strom in der gleichen Richtung unterhält und so den Condensator neuerdings, und zwar entgegengesetzt, ladet. Es ist am einfachsten, auch den anderen Theil der Energie und überhaupt diese Energie in den übrigen Fällen, in welchen eine unmittelbar wahrnehmbare Magnetisirung eines Körpers nicht vorhanden ist, als eine magnetische aufzufassen, welche in der Magnetisirung des Mediums, in dem die Entladung vor sich geht, ihren Sitz hat. Diese Annahme genügt ja auch zur Entwicklung der Gesetze der electrodynamischen Induction.

Das Potential der electrischen Ladung des Condensators habe zur Zeit  $t$  auf der ersten Platte desselben den Werth  $P_1$ , auf der zweiten Platte den Werth  $P_2$ . Die Menge der Electricität auf der ersten Platte sei zur selben Zeit  $Q_1$ . Die Capacität  $C$  des Condensators ist definirt durch die Gleichung:

$$(1) \quad Q_1 = C(P_1 - P_2).$$

Hat der Entladungsstrom zur Zeit  $t$  die Intensität  $J$ , so ist:

$$(2) \quad J = - \frac{dQ_1}{dt} = - C \frac{d}{dt} (P_1 - P_2).$$

Findet die Entladung zwischen zwei voneinander weit entfernten Conductoren statt, wie dies bei den Vibratoren von Hertz der Fall ist, so ergibt sich die Beziehung zwischen  $J$  und der Potentialdifferenz  $P_1 - P_2$  der Ladungen der beiden Conductoren in folgender Weise. Ist  $C_1$  die Capacität des ersten,  $C_2$  jene des zweiten Conductors, so ist:

$$Q_1 = C_1 P_1, \quad Q_2 = C_2 P_2, \quad \frac{dQ_1}{dt} = -J, \quad \frac{dQ_2}{dt} = +J,$$

$$\text{also:} \quad J = - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \frac{d}{dt} (P_1 - P_2).$$

Sind die beiden Capacitäten  $C_1$  und  $C_2$  einander gleich, also  $C_2 = C_1$ , so ist in der Gl. (2)  $\frac{1}{2}C_1$  an die Stelle von  $C$  zu setzen.

Die Intensität  $J$  ist die Summe der Intensitäten, welche die Strömung in den einzelnen elementaren Fasern des Entladungsdrahtes besitzt. Ist  $u$  die Stromdichtigkeit für ein Element  $dq$  des Querschnittes des Drahtes, so ist:

$$(3) \quad J = \int u dq.$$

Das Integral ist über den ganzen Querschnitt des Drahtes auszudehnen. Der Einfachheit wegen soll dieser Querschnitt als kreisförmig vorausgesetzt werden. Dann ist  $u$  ausser von  $t$  nur noch von einer Variablen  $r$ , dem Abstände des Elementes  $dq$  vom Mittelpunkte des Kreises abhängig und durch die Gleichung:

$$(4) \quad \frac{du}{dt} = k \left( \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right)$$

bestimmt. Der Coëfficient  $k$  ist  $= \sigma/4\pi\mu$ .  $\sigma$  bedeutet den specifischen Widerstand,  $\mu$  die magnetische Leitungsfähigkeit der Substanz des Drahtes. Bezeichnet man die Magnetisierungszahl dieser Substanz mit  $\theta$ , so ist  $\mu = 1 + 4\pi\theta$ .

Zur vollständigen Bestimmung von  $u$  gehören noch zwei Gleichungen, von denen eine  $u$  für  $t=0$  bestimmt, die andere eine für jeden Werth von  $t$  für die Oberfläche des Drahtes, also für  $r=a$  zu erfüllende Bedingung darstellt. Die erste Gleichung soll für den vorliegenden Fall in  $u=0$  für  $t=0$  und jeden zwischen  $r=0$  und  $r=a$  liegenden Werth von  $r$  bestehen. Die zweite Gleichung ist:

$$(5) \quad P_1 - P_2 = l\sigma u_1 + L \frac{dJ}{dt}.$$

$l$  bedeutet die Länge des Entladungsdrahtes,  $L$  den Coëfficienten der Induction, welche die Strömung auf eine in der Oberfläche des Drahtes liegende Faser ausübt,  $u_1$  die Stromdichtigkeit in einer solchen Faser. Die auf eine solche Faser wirkende electromotorische Kraft ist der Potentialdifferenz  $P_1 - P_2$  gleich angenommen. Bezüglich der Ableitung der Gleichungen (4) und (5) verweise ich auf meine Abhandlung: Ueber veränderliche electricische Ströme in dicken Leitungsdrähten.<sup>1)</sup>

Die Gl. (5) kann man durch eine andere ersetzen, welche nur die für die Oberfläche geltenden Werthe von  $u$  und seiner Differentialquotienten enthält. Differenzirt man diese Gleichung nach  $t$  und benützt die Relation (2), so folgt:

$$(6) \quad -\frac{J}{C} = l\sigma \frac{du_1}{dt} + L \frac{d^2J}{dt^2}.$$

$J$  kann noch in anderer Weise als durch die Formel (3) ausgedrückt werden. Multiplicirt man die Gl. (4) mit  $2\pi r dr$  und integrirt beide Seiten derselben von  $r=0$  bis  $r=a$ , so folgt:

$$(7) \quad \frac{dJ}{dt} = 2\pi a k \left( \frac{du}{dr} \right),$$

worin der Differentialquotient von  $u$  nach  $r$  für  $r=a$  zu nehmen ist. Differenzirt man (6) nochmals nach  $t$  und benützt die Relation (7), so erhält man:

1) J. Stefan, Wien. Ber. 95. 2. Abth. p. 917. 1887.



$$-\frac{2\pi k a}{C} \left( \frac{du}{dr} \right)_1 = l\sigma \frac{d^2 u_1}{dt^2} + 2\pi k a L \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{du}{dr} \right)_1.$$

Führt man die Bezeichnungen:

$$(8) \quad \frac{1}{LC} = m^2, \quad \frac{l\sigma}{2\pi a k L} = \frac{2l\mu}{aL} = \frac{n}{V k}.$$

ein, so erhält die für die Oberfläche geltende Bedingung die Form:

$$(9) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{du}{dr} \right)_1 + \frac{n}{V k} \frac{d^2 u_1}{dt^2} + m^2 \left( \frac{du}{dr} \right)_1 = 0.$$

Die Lösung der Aufgabe wird sehr vereinfacht, wenn man den Fall eines sehr dünnen Drahtes ausschliesst und von vorneherein die Annahme macht, dass die Stromdichtigkeit  $u$  nur in einer sehr dünnen, an der Oberfläche liegenden Schichte endliche Werthe besitzt, in den tiefer liegenden Theilen des Drahtes aber verschwindend klein ist. Es empfiehlt sich dann, statt des Radius  $r$  die Tiefe  $x$  unter der Oberfläche als Veränderliche einzuführen. Man kann die Gl. (4) durch die einfachere:

$$(10) \quad \frac{du}{dt} = k \frac{d^2 u}{dx^2}$$

und die Bedingungsgleichung (9) durch:

$$(11) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{du}{dx} \right)_0 - \frac{n}{V k} \frac{d^2 u_0}{dt^2} + m^2 \left( \frac{du}{dx} \right)_0 = 0$$

ersetzen, welche für  $x = 0$  zu erfüllen ist. Zu diesen beiden kommt dann noch die weitere Bedingung, dass für  $t = 0$  die Function  $u$  für alle positiven Werthe von  $x$  verschwinden muss.

Ein Integral der Gl. (10), welches dieser letzteren Bedingung genügt, ist:

$$(12) \quad u = \frac{x}{2\sqrt{k t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} f(x + 2\eta\sqrt{k t}) d\eta.$$

Darin bedeutet  $f$  eine beliebige Function und besteht die weitere Aufgabe nun lediglich darin, die Function  $f$  so zu wählen, dass dieses Integral auch der Gl. (11) genügt. Dieses Verfahren ist schon von W. Thomson bei der Lösung einer analogen, der Theorie der Wärmeleitung angehörigen Aufgabe angewendet worden. Aus (12) folgt zunächst:

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f(2\eta \sqrt{kt}) d\eta.$$

also: 
$$\frac{du_0}{dt} = \frac{k}{\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f'(2\eta \sqrt{kt}) \cdot \eta d\eta.$$

Wendet man auf diese Formel das Verfahren der theilweisen Integration an, so erhält man:

$$\frac{du_0}{dt} = -\frac{k f'(0)}{2 \sqrt{\pi kt}} + \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f''(2\eta \sqrt{kt}) d\eta$$

und daraus:

$$\frac{d^2 u_0}{dt^2} = \frac{k f''(0)}{4 t \sqrt{\pi kt}} - \frac{k^2 f'''(0)}{2 \sqrt{\pi kt}} + \frac{k^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f^{IV}(2\eta \sqrt{kt}) d\eta.$$

Ferner ergibt sich aus (12):

$$(13) \quad \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = -\frac{f(0)}{2 \sqrt{\pi kt}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f'(2\eta \sqrt{kt}) d\eta$$

und daraus erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dx}\right)_0 &= \frac{f(0)}{4 t \sqrt{\pi kt}} - \frac{k f'''(0)}{2 \sqrt{\pi kt}} + \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f'''(2\eta \sqrt{kt}) d\eta, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{du}{dx}\right)_0 &= \frac{3 f(0)}{8 t^2 \sqrt{\pi kt}} + \frac{k f''(0)}{4 t \sqrt{\pi kt}} - \frac{k^2 f^{IV}(0)}{2 \sqrt{\pi kt}} \\ &\quad + \frac{k^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\eta^2} f^{V}(2\eta \sqrt{kt}) d\eta. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die Gl. (11) ein, so findet man, dass dieser genügt wird, wenn  $f$  allgemein die Gleichung:

$$(14) \quad k^2 f^V - \pi k \sqrt{k} f^{IV} + m^2 f' = 0$$

befriedigt und für den Nullwerth des Argumentes die Bedingungen:

$$(15) \quad f(0) = 0, \quad \eta f'(0) - \sqrt{k} f''(0) = 0, \quad \eta f'''(0) - \sqrt{k} f^{IV}(0) = 0$$

erfüllt.

Die Gl. (14) liefert die Function  $f'(y)$  als Summe von vier Exponentiellen. Ich will dieselbe in der Form:

$$(16) \quad f''(y) = A_1 e^{\frac{\alpha_1 y}{\sqrt{k}}} + A_2 e^{\frac{\alpha_2 y}{\sqrt{k}}} + A_3 e^{\frac{\alpha_3 y}{\sqrt{k}}} + A_4 e^{\frac{\alpha_4 y}{\sqrt{k}}}$$

annehmen. Darin bedeuten  $A_1, A_2, A_3, A_4$  erst zu bestimmende constante Grössen,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  und  $\alpha_4$  aber die Wurzeln der Gleichung:

$$(17) \quad \alpha^4 - n\alpha^3 + m^2 = 0.$$

Zur Bestimmung der Constanten  $A$  dienen zuerst die Gleichungen (15). Die letzte derselben gibt:

$$A_1(\alpha_1^3 - n\alpha_1^2) + \dots + A_4(\alpha_4^3 - n\alpha_4^2) = 0,$$

wofür man mit Rücksicht auf (17) auch:

$$(18) \quad \frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} + \frac{A_3}{\alpha_3} + \frac{A_4}{\alpha_4} = 0$$

setzen kann. Ebenso erhält man aus der zweiten der Gleichungen (15):

$$(19) \quad \frac{A_1}{\alpha_1^3} + \frac{A_2}{\alpha_2^3} + \frac{A_3}{\alpha_3^3} + \frac{A_4}{\alpha_4^3} = 0.$$

Es sind nun noch zwei Gleichungen nothwendig. Diese gewinnt man aus den Gleichungen (5) und (6), welche für jede Zeit, also auch für  $t=0$  gelten. Setzt man in denselben der Formel (7) entsprechend:

$$(20) \quad \frac{dJ}{dt} = -2\pi ak \left( \frac{du}{dx} \right)_0,$$

so geben sie, da für  $t=0$  sowohl  $u_1$  oder  $u_0=0$ , als auch  $J=0$  ist, für diesen Werth der Zeit:

$$\frac{P_1^0 - P_2^0}{2\pi akL} + \left( \frac{du}{dx} \right)_0 = 0, \quad \frac{n}{\sqrt{k}} \frac{du_0}{dt} - \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{dx} \right)_0 = 0.$$

Unter  $P_1^0$  und  $P_2^0$  sind die Werthe verstanden, welche die Potentiale  $P_1$  und  $P_2$  zur Zeit  $t=0$  besitzen. Nach Einsetzung der Werthe der Differentialquotienten von  $u$  und Berücksichtigung der Gleichungen (15) erhält man:

$$f'(0) = -\frac{P_1^0 - P_2^0}{\pi akL}, \quad n f''(0) - \sqrt{k} f'''(0) = 0,$$

und daraus:

$$(21) \quad A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = -\frac{P_1^0 - P_2^0}{\pi akL},$$

$$(22) \quad \frac{A_1}{\alpha_1^2} + \frac{A_2}{\alpha_2^2} + \frac{A_3}{\alpha_3^2} + \frac{A_4}{\alpha_4^2} = 0.$$

Die Gleichungen (18), (19) und (21), (22) bilden einen besonderen Fall eines bekannten Systems von Gleichungen,

deren allgemeine Lösung schon von Lagrange gegeben worden und welche für diesen besonderen Fall auch leicht direct zu finden ist. Es ist:

$$(23) \quad A_1 = -\frac{\alpha_1}{4\alpha_1 - 3n} \cdot \frac{P_1^0 - P_2^0}{\pi a k L}.$$

Setzt man in diese Formel an Stelle von  $\alpha_1$  der Reihe nach die Wurzeln  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , so erhält man die zugehörigen Constanten  $A_2, A_3, A_4$ . Die Aufgabe ist hiermit vollständig gelöst.

Zur Discussion dieser Lösung will ich die Formeln, welche die Intensität der Entladung bestimmen, benützen. Aus (20) folgt, wenn man das Zeichen der Variablen  $\eta$  mit dem entgegengesetzten vertauscht:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{2\pi a k}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\eta^2} (A_1 e^{-2\alpha_1 \eta \sqrt{t}} + \dots A_4 e^{-2\alpha_4 \eta \sqrt{t}}) d\eta.$$

Den Werth von  $J$  kann man aus der Gl. (6) oder direct aus der vorstehenden Formel durch Integration nach  $t$  ableiten. Zu diesem Behufe sind erst die darin enthaltenen Integrale nach dem Schema:

$$\int_0^\infty e^{-\eta^2 - 2\alpha \eta \sqrt{t}} d\eta = e^{\alpha^2 t} \int_{\alpha \sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta$$

zu transformiren. Letzterer Ausdruck gibt nach  $t$  unbestimmt integrirt:

$$\frac{e^{\alpha^2 t}}{\alpha^2} \int_{\alpha \sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{2\alpha \sqrt{t}}.$$

Der Werth von  $J$  setzt sich aus den vier derartigen Theilen zusammen, welche man erhält, wenn man  $\alpha$  durch  $\alpha_1$  bis  $\alpha_4$  ersetzt. Es ist nun zu bemerken, dass die vier Glieder, welche  $\sqrt{t}$  im Nenner tragen, infolge der Gl. (18) sich wegheben. Es bleibt sonach:

$$(24) \quad J = -\frac{2\pi a k}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{A_1 e^{\alpha_1^2 t}}{\alpha_1^2} \int_{\alpha_1 \sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta + \dots + \frac{A_4 e^{\alpha_4^2 t}}{\alpha_4^2} \int_{\alpha_4 \sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2} d\eta \right].$$

Eine Constante der Integration ist nicht hinzu zu fügen, da für  $t=0$  auch  $J=0$  werden muss und der vorstehende Ausdruck der Gl. (22) gemäss diese Bedingung erfüllt.

Die Eigenschaften der die Stromstärke  $J$  darstellenden Function sind nun wesentlich abhängig von der Beschaffenheit der Wurzeln der Gl. (17). Diese Gleichung kann keine reelle negative Wurzel haben, da die darin enthaltenen Grössen  $m$  und  $n$  wesentlich positiv sind. Eine negative Wurzel hätte auch zur Folge, dass das ihr entsprechende Glied in dem Ausdrucke für  $J$  mit wachsenden Werthen der Zeit  $t$  gegen unendlich convergiren würde. Die Gleichung kann nur positive reelle Wurzeln haben, da aber in ihr die Glieder mit der zweiten und ersten Potenz der Unbekannten fehlen, so können nicht alle vier Wurzeln, sondern nur zwei positiv sein, die beiden anderen sind complex, und zwar wegen des Fehlens der angeführten Glieder der Art, dass der reelle Bestandtheil derselben eine negative Zahl ist.

Es können aber auch alle vier Wurzeln complex sein, und zwar ist dies der gewöhnliche Fall. Die Abwesenheit der Glieder mit der zweiten und ersten Potenz hat zur Folge, dass die reellen Bestandtheile der beiden complexen Wurzelpaare entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Es ist also in jedem Falle ein complexes Wurzelpaar mit einem negativen reellen Bestandtheile vorhanden.

Die Glieder in dem Ausdrucke für  $J$ , welche den complexen Wurzeln:

$$\alpha_1 = p + qi, \quad \alpha_2 = p - qi$$

entsprechen, kann man, wenn die Coëfficienten:

$$\frac{A_1}{\alpha_1^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}(M + Ni), \quad \frac{A_2}{\alpha_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}(M - Ni)$$

gesetzt werden, transformiren in:

$$(25) \left\{ \begin{aligned} & (M \cos 2pqt - N \sin 2pqt) e^{pt} \int_{p\sqrt{i}}^{\infty} e^{-\eta^2} \cos 2\eta q \sqrt{t} \cdot d\eta \\ & + (M \sin 2pqt + N \cos 2pqt) e^{pt} \int_{p\sqrt{i}}^{\infty} e^{-\eta^2} \sin 2\eta q \sqrt{t} \cdot d\eta. \end{aligned} \right.$$

Ist  $p$  positiv, so convergiren mit wachsenden Werthen von  $t$  beide Theile dieses Ausdruckes gegen Null. Ist aber  $p$  negativ, so gilt dies ersichtlicher Weise nur für den zweiten Theil, für den ersten aber ist dies, weil:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \cos 2\eta q \sqrt{t} \, d\eta = \sqrt{\pi} e^{-q^2 t}$$

ist, nur dann der Fall, wenn  $q^2$  grösser ist als  $p^2$ . Diese Bedingung ist auch thatsächlich erfüllt.

Substituirt man  $p + qi$  für  $a$  in der Gl. (17), so findet man die Relation:

$$(26) \quad \frac{q^2}{p^2} = \frac{3n - 4p}{n - 4p}.$$

Da  $n$  wesentlich positiv ist, so folgt daraus sofort, dass  $q^2$  für negative Werthe von  $p$  grösser ist als  $p^2$ .

Für das complexe Wurzelpaar, dessen reeller Theil  $p$  negativ ist, convergirt also der Ausdruck (25) mit wachsendem  $t$  gegen:

$$(27) \quad \sqrt{\pi} e^{-(q^2 - p^2)t} [M \cos 2pqt - N \sin 2pqt].$$

Dieser Ausdruck stellt eine oscillatorische Bewegung dar, deren Amplituden mit der Zeit in geometrischer Progression abnehmen, die also der Bewegung eines Pendels entspricht. Die Schwingungsdauer  $\tau$  ist durch:

$$\tau = -\frac{\pi}{pq}$$

bestimmt.

Die Amplituden dieser Bewegung werden mit der Zeit um so langsamer abnehmen, je weniger  $q^2$  von  $p^2$  verschieden ist. Wie man aus (26) ersieht, kommt  $q^2$  um so näher an  $p^2$ , je kleiner  $n$  ist. Für kleine Werthe von  $n$  wird also die Intensität dieser Bewegung erst nach langer Zeit verschwindend klein werden. Diese Bewegung ist diejenige, welche den beobachteten Oscillationen entspricht.

Die durch den Ausdruck (25) für negative Werthe von  $p$  charakterisirte Bewegung ist immer vorhanden, sie bildet aber nur einen Theil des ganzen Vorganges der Entladung. Es ist ihr noch eine zweite Bewegung superponirt, welche dem anderen Wurzelpaare der Gl. (17) entspricht. Ist dieses Wurzelpaar ebenfalls complex, so ist auch diese zweite Bewegung durch den Ausdruck (25) jedoch für positive Werthe von  $p$  bestimmt, welcher in diesem Falle mit wachsender Zeit viel rascher abnimmt, als derselbe Ausdruck für negative Werthe von  $p$ .

Sind die beiden anderen Wurzeln reell, so haben die denselben entsprechenden Glieder in der Formel (24) die Eigenschaft für  $t=0$  mit einem endlichen Werthe zu beginnen und mit wachsender Zeit ununterbrochen abzunehmen. Diese Glieder drücken eine aperiodische, mit wachsender Zeit verschwindende Bewegung aus. Aus der Gl. (17) erkennt man sofort, dass die reellen Wurzeln der Gleichung zwischen 0 und  $n$  liegen. Man kann aber die Gleichung auch transformiren in:

$$\left(\alpha^2 - \frac{na}{2}\right)^2 = \frac{n^2\alpha^2}{4} - m^2.$$

Daraus folgt, dass ein reeller Werth von  $\alpha$  an die Bedingung:

$$\alpha = \text{oder} > \frac{2m}{n}$$

gebunden ist. Da  $\alpha$  kleiner ist als  $n$ , so ist die Existenz der reellen Wurzeln ausgeschlossen, wenn  $n^2$  kleiner ist als  $2m$ . Da  $m$  immer durch eine sehr grosse Zahl ausgedrückt ist, so muss auch  $n$  sehr gross sein, wenn diese Bedingung erfüllt sein soll. Infolge der Gl. (26) wird in diesem Falle auch  $q^2$  viel grösser als  $p^2$ . Die neben der aperiodischen vorhandene oscillirende Bewegung wird deshalb schon nach sehr kurzer Zeit erlöschen.

Es ist nicht leicht, die Forderung  $n^2 > 2m$  experimentell in der Weise zu erfüllen, dass die Bedingungen, unter welchen die hier entwickelte Theorie gilt, gewahrt bleiben. Es müsste eine Flasche von sehr hoher Capacität und zur Schliessung derselben ein Eisendraht von sehr kleinem Durchmesser genommen werden. Für sehr dünne Drähte hört jedoch die Berechtigung, die Gl. (4) durch die einfachere Gl. (10) zu ersetzen, auf. Auch könnte durch die Wahl eines Leiters von sehr grossem specifischen Widerstande, z. B. eines Electrolyten, wenn demselben ein mässiger Querschnitt, etwa 1 cm im Quadrat, gegeben wird, der Werth von  $n$  in sehr bedeutendem Maasse erhöht werden. Eine solche Wahl ist jedoch nicht zulässig. In einem solchen Leiter vertheilen sich electrische Bewegungen auch wenn sie so rasch wie die Entladungen einer Leydener Flasche verlaufen, nahezu gleichförmig über den Querschnitt. Bildet ein solcher Leiter die



Schliessung, dann ist die Entladung nach der gewöhnlichen Theorie zu berechnen.

Wenn  $n$  eine sehr kleine Grösse im Vergleiche zu  $m$  ist, so kann man, wenn es sich nur um die Bestimmung der Schwingungsdauer der oscillirenden Bewegung handelt, diese in genügender Annäherung finden, wenn man die Gl. (17) auf:

$$\alpha^4 + m^2 = 0$$

reducirt. Die Formel (24) vereinfacht sich unter dieser Annahme in:

$$J = \frac{P_1^0 - P_2^0}{mL} \sin mt,$$

und stellt eine einfache Schwingung mit constanter Amplitude dar.

Die Dauer der Oscillation  $\tau_0$  ist bestimmt durch:

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{m} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Es folgt dieses Resultat auch unmittelbar aus den Gleichungen (5) und (6), wenn man in denselben das Glied  $l\sigma u_1$  unterdrückt, d. h. den Einfluss des Widerstandes auf die Entladung vernachlässigt. Zu derselben Formel führt auch die gewöhnliche Theorie, nur bedeutet nach dieser  $L$  nicht den Inductionscoefficienten für einen Faden in der Oberfläche des Drahtes, sondern den Coefficienten der Induction des Drahtes auf sich selbst. Der letztere ist von der magnetischen Beschaffenheit des Drahtes abhängig, der erstere nicht. Dieser Umstand bedingt einen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Theorien. Nach der hier vorgetragenen ist die Oscillationsdauer für einen Eisendraht ebenso gross, wie für einen Kupferdraht von gleichen Dimensionen, während sie nach der früheren Theorie für einen Eisendraht vielmal grösser gefunden wird.

Setzt man  $n$  sehr klein voraus und lässt in der Rechnung die Glieder weg, welche  $n$  in der zweiten oder einer höheren Potenz enthalten, so erhält man für die Wurzeln mit negativem reellen Theil den Ausdruck:

$$p \pm qi = -\sqrt{\frac{m}{2}} + \frac{n}{4} \pm i\sqrt{\frac{m}{2}}.$$

Die Schwingungsdauer ist:

$$\tau = -\frac{\pi}{pq} = \frac{2\pi}{m\left(1 - \frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{2m}}\right)} = \frac{\tau_0}{1 - \frac{n}{4}\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi}}}.$$

Das Gesetz, nach welchem die Amplituden mit der Zeit abnehmen, ist durch die Exponentielle:

$$e^{-(q^2 - p^2)t} = e^{-\frac{nt}{2}\sqrt{\frac{m}{2}}}$$

bestimmt.

Nach der Formel (8) ist:

$$n = \frac{2l\mu\sqrt{k}}{aL} = \frac{2l}{aL}\sqrt{\frac{\sigma\mu}{4\pi}}.$$

Drückt man  $m$  durch die Schwingungsdauer  $\tau_0$  aus, so wird:

$$\frac{n}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} = \frac{l}{2aL}\sqrt{\frac{\sigma\mu}{\tau_0}}.$$

Nach der gewöhnlichen Theorie ist die Abnahme der Amplituden mit der Zeit durch die Exponentielle:

$$e^{-\frac{wt}{2L}}$$

gegeben, worin  $w$  den Widerstand des Entladungsdrahtes bedeutet, also:

$$w = \frac{l\sigma}{\pi a^2}$$

ist. Es hat daher auch:

$$\frac{l}{a}\sqrt{\frac{\sigma\mu}{\tau_0}} = w'$$

die Bedeutung eines Widerstandes. Es ist dies dieselbe Formel, welche ich in der Abhandlung „Ueber electriche Schwingungen in geraden Leitern“ für den Widerstand abgeleitet habe, welchen ein Draht gegen periodische Ströme von sehr kurzer Schwingungsdauer äussert.  $w'$  ist viel grösser als  $w$ , die Amplituden der Schwingungen nehmen nach der hier vorgetragenen Theorie viel rascher ab, als nach der gewöhnlichen. Insbesondere fordert die Theorie für Eisendrahte eine viel raschere Abnahme der Amplituden als für unmagnetische Drähte.

#### IV. Ueber die Wellenlängen electrischer Schwingungen; von K. Waitz.

Zum Nachweis der electrischen Schwingungen, die durch die Entladungen eines Inductoriums in einem sogenannten „primären Leiter“ entstehen, hat Hr. Hertz in den meisten Fällen als „secundären Leiter“ (Resonator) einen kreisförmig gebogenen Draht benutzt, zwischen dessen sich gegenüber stehenden Enden ein Funke übersprang. Die periodische Veränderung in Länge und Glanz dieses Funkens an verschiedenen Stellen des Raumes zeigt dann das Vorhandensein einer electrischen Welle an.

Als ich bei Wiederholung solcher Versuche die Enden des secundären Kreises aus den 2 cm im Durchmesser haltenden Kugeln eines Funkenmikrometers bestehen liess und dieselben zugleich durch einen Rheostaten aus Draht von vielen Ohms Widerstand verband, verschwanden die Funken im Mikrometer gänzlich oder wurden wenigstens sehr klein und schwach. Je mehr man dann den Widerstand der Zweigleitung (des Rheostaten) verminderte, um so deutlicher traten die Funken wieder auf, und als endlich nur ein kurzer Kupferdraht zur Abzweigung benutzt wurde, war die Funkenintensität nur wenig schwächer wie vorher ohne Zweigleitung. Man hatte also die paradoxe Erscheinung, dass wenn man dem im Kreise inducirten Strom eine geschlossene metallische Bahn von sehr geringem Widerstand darbot, er nicht diese benutzte, sondern den Weg durch die Luftstrecke zwischen den Kugeln des Funkenmikrometers vorzog, dass wenn man dagegen den Widerstand der geschlossenen Leitung vergrösserte, ein immer grösserer Theil des Stroms durch diese Leitung ging, bis schliesslich bei beträchtlichem Widerstand der Leitung der Strom nur diese benutzte und gar keine sichtbare Entladung zwischen den Kugeln des Funkenmikrometers mehr stattfand.

Der Gedanke lag nahe, dass diese Erscheinung durch die Eigenschaften der sehr schnellen Schwingungen in dem secundären Kreise bedingt sein und dass es möglich sein müsse,

durch stetiges Aendern der Länge der Zweigleitung eine periodische Ab- und Zunahme der Funkenintensität zu erhalten. Würde man die Zweigleitung aus immer grösser werdenden Stücken von Kupferdraht bestehen lassen, so hätte man bei einer bestimmten Länge der Abzweigung eine Anordnung, die der von Hrn. Hertz<sup>1)</sup> benutzten ähnlich ist, mit der er zum erstenmale eine Schwingung mit 2 Knotenpunkten herstellte.

Um dies zu verwirklichen, liess man die Zweigleitung aus zwei langen, isolirten, einander parallelen Kupferdrähten bestehen, auf denen man ein kurzes Verbindungsstück von Kupferdraht vorschob. Bei solchem Verschieben erhielt man in der That eine periodische Ab- und Zunahme der Funkenintensität, d. h. das Funkenmikrometer musste dabei an immer andere Stellen der im Drahtsystem sich ausbildenden electrischen Welle kommen. Es ist einleuchtend, dass zwischen zwei aufeinander folgenden Stellungen des Brückendrahtes, für die z. B. der Funke ein Maximum der Intensität zeigt, beide Abzweigungsdrähte zusammen eine Länge haben müssen, die gleich einem ganzen Vielfachen der Länge unserer stehenden Welle ist. Am einfachsten wäre es, anzunehmen, diese Drahtlänge entspräche gerade *einer* ganzen Länge der stehenden Welle; die Beobachtung zeigt jedoch, dass die gesammte durch die genannte Verschiebung eingeschaltete Drahtlänge immer gleich dem Doppelten der Wellenlänge ist. Es befindet sich nämlich, wenn der Funke ein Maximum ist, der Verbindungsdraht stets an der Stelle eines Knotenpunktes der Schwingung, wie man nachweist, indem man grosse Capacitäten an den Brückendraht anhängt. Diese können nur dann die Schwingungsbewegung nicht stören, wenn sie mit Knotenpunkten der Welle verbunden sind, und in der That zeigte sich eine solche Belastung des Brückendrahtes nur und stets in den genannten Lagen als auf die Schwingung ohne Einfluss.

Wellenlänge der Hauptschwingung des primären Leiters.

Die eben beschriebene Art der Beobachtung (wir wollen sie die Methode der Abzweigung nennen) bietet nach dem

1) H. Hertz, Ueber sehr schnelle electrische Schwingungen. Wied. Ann. 31. p. 441. 1887.

Vorstehenden ein bequemes Mittel, die Länge der stehenden Wellen in Drähten zu messen. Sie wurde wie folgt benutzt, um diese Bestimmung für verschiedene primäre Schwingungen auszuführen. Man verwandte zu dem Zweck zwei primäre Leiter *A* und *B*.

Leiter *A* bestand aus zwei Kupferdrähten von je 38 cm Länge und 5,5 mm Dicke; an einem Ende jedes Drahtes war eine Zinkplatte von 40 cm<sup>2</sup> Fläche, am andern Ende eine Messingkugel von 2,7 cm Durchmesser befestigt. Zwischen den Kugeln schlug der Inductionsfunke über, und das Ganze stand merklich in einer und derselben Verticalebene. Leiter *B* war aus zwei je 12 mm dicken und 15 cm langen Messingstangen gebildet; an den einander zugekehrten Enden trugen diese die genannten Entladungskugeln, an den abgewandten Enden aber Zinkplatten von 20 cm<sup>2</sup> Fläche. Diesen primären Leitern stellte man den secundären Kreis gegenüber, die Ebene des Kreises vertical und parallel der Verticalebene durch den primären Leiter, das Funkenmikrometer im tiefsten Punkt des Kreises und die zwei Abzweigungsdrähte horizontal und senkrecht zur Kreisebene.

Anfangs benutzte man als secundäre Kreise stets solche, welche mit der primären Schwingung merklich in Resonanz waren, also für Leiter *A* einen Kreis von circa 70 cm, für Leiter *B* einen von etwa 30 cm Durchmesser. Als man dann aber versuchte, bei Benutzung eines nicht mit dem primären Leiter in Resonanz befindlichen Kreises durch Abzweigung die Wellenlänge zu bestimmen, gelang dies ebenso leicht, und es zeigte sich bald, dass die Dimensionen des secundären Kreises in sehr weiten Grenzen abgeändert werden durften, ohne an dem Resultat der Wellenlängebestimmung etwas zu ändern. Man variierte die Dimensionen der secundären Kreise zwischen 7 cm und 100 cm Durchmesser, und stets erhielt man durch unsere Methode dieselbe Wellenlänge, sodass man auf diese Weise die dem primären Leiter zugehörige Schwingung (wir nennen die so bestimmte die Hauptschwingung) in bequemer und eindeutiger Weise finden kann. Ja selbst wenn man den secundären Kreis ganz wegliess und nur das Funkenmikrometer mit den Abzweigungsdrähten und dem Brückendraht der primären Schwingung

gegenüber stellte, gelang es deutlich die periodische Aenderung der Funkenintensität zu beobachten und die Wellenlänge zu bestimmen. Freilich werden bei Benutzung sehr kleiner secundärer Kreise und gar bei gänzlicher Weglassung derselben die Funken sehr klein und macht es Mühe ihre Maximalintensität scharf zu beobachten, deshalb wird es sich empfehlen, stets grosse secundäre Kreise zu benutzen, wo die bewegte Electricitätsmenge relativ gross und der Funken heller ist. Dagegen ist es nicht nöthig, die Abzweigung an den Kugeln des Funkenmikrometers zu machen, sondern dies kann an beliebigen Stellen des secundären Kreises geschehen, nur dürfen die beiden Abzweigungspunkte nicht zu nahe nebeneinander sich befinden und müssen zu beiden Seiten der dem Funkenmikrometer gegenüber liegenden Stelle des Kreises liegen.

Man erhielt so für alle verwandten secundären Kreise als Wellenlänge der primären Schwingung  $A$  resp.  $B$ :  $\lambda_A = 2,9$  m;  $\lambda_B = 1,4$  m. Der erste Werth ist in Uebereinstimmung mit den Angaben des Hrn. Hertz<sup>1)</sup>, der für einen  $A$  fast gleichen primären Leiter, dessen Kupferdraht nur 60 cm statt wie bei uns 76 cm lang war, eine Wellenlänge von 2,8 m beobachtete und mit Hülfe der Theorie aus Selbstinductionscoefficienten und Capacität des Leiters einen ähnlichen Werth berechnete. — Noch in folgender Art kann man zu demselben Werth der Wellenlänge für die primäre Schwingung gelangen. Man führe die mit den Kugeln des Funkenmikrometers verbundenen Drähte nicht parallel, sondern in gerader Linie nach entgegengesetzten Richtungen von den Kugeln aus und verschiebe auf jedem Draht ein grösseres, leitend mit ihm verbundenes Metallblech, während das Ganze dem primären Leiter parallel gegenüber steht. Die Differenz zweier verschiedener Entfernungen der Metallbleche voneinander, für die der Funke ein Maximum ist, gibt ein Ganzes Vielfaches der Wellenlänge. Statt zweier Drähte kann man dabei auch nur einen einzigen benutzen, sodass das Funkenmikrometer das eine Ende des Drahtes, auf dem nur ein

1) H. Hertz, Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen. Wied. Ann. 34. p. 558. 1888.

Metallblech verschoben wird, bildet und seine äussere Kugel isolirt für sich steht. — Die letzt angeführten Arten der Beobachtung sind aber wegen der bedeutend kleineren Funken viel weniger genau als die Methode der Abzweigung.

Als man versuchte, durch Abzweigung ausser für die primären Leiter *A* und *B* die Wellenlänge für einen Leiter *C* zu bestimmen, der bedeutend schnellere Schwingungen als *A* und *B* geben sollte, gelang das nicht. *C* bestand dabei aus 2 Messingstäben, deren jeder 15 cm lang und 2,5 cm dick war und an einem Ende wieder eine der Entladungskugeln aus Messing von 2,5 cm Durchmesser trug. Trotz vieler Bemühungen und Abänderungen der Anordnung liess sich bei Verschiebung des Brückendrahtes nur selten und dann nicht in eindeutiger Weise das Periodische in der Intensität des Funkens nachweisen, sodass auf eine Messung der Wellenlänge für *C* nach dieser Methode verzichtet werden musste.

Die Vielheit der in der primären Schwingung enthaltenen Wellen.

Eine Messung der Wellenlänge der durch den primären Leiter *C* in einem Drahte erregten Schwingungen gelang mit folgender Anordnung, die sehr ähnlich einer der von Hrn. Hertz benutzten war. Man stellte die zwei Messingstäbe des Leiters *C* sich in gerader horizontaler Linie gegenüber und spannte den Draht *L*, auf den die Schwingungen übertragen werden sollten, horizontal und senkrecht zu der durch *C* gelegten Verticalebene. Draht *L* wurde mit einem Messingstab leitend verbunden, der gleiche Dimensionen wie einer der primären Stäbe hatte und sich hinter einem solchen, parallel mit ihm befand. An den ausgespannten Draht hängte man zu beiden Seiten des primären Leiters mit Kuperhaken Messingbleche von etwa 2700 cm<sup>2</sup> Fläche an, die den Draht electrisch begrenzten, sodass zwischen ihnen stehende Wellen auf ihm zu Stande kamen. Das eine Blech blieb stets an derselben Stelle, das andere wurde auf dem Draht verschoben und so nach und nach lange oder kurze Strecken desselben den electrischen Schwingungen dargeboten. Der secundäre Kreis stand vertical, entweder nur durch die Klemmschrauben des Funkenmikrometers, oder,



wenn nöthig, durch zwei Holzstative aufrecht gehalten. Das Funkenmikrometer befand sich wieder im tiefsten Punkt des Kreises, und dieser nahm in seiner Ebene den Draht  $L$  auf, d. h. der secundäre Kreis befand sich nach Hrn. Hertz's Bezeichnungsweise in der ersten Hauptlage. Durch Verschiebung des Messingblechs erhielt man periodische Aenderungen in der Intensität des Funkens und damit die gesuchte Wellenlänge.

Zur genauen Auffindung der Stelle des Drahtes, an die das Blech gehängt werden musste, um das Maximum der Funkenintensität hervorzurufen, wurden (wie auch bei den früheren Versuchen) entweder die Kugeln des Mikrometers so weit auseinander geschraubt, dass nur für die genannten Lagen des Bleches ein Funke übersprang, oder, und das erwies sich oft als besser, man verschob das Blech immer im gleichen Sinn um 10 oder 20 cm auf dem Draht und maass für jede solche Stellung dreimal die Funkenlänge im Mikrometer. Es gelang so bei den grösseren Wellen die Länge auf 10 bis 20 cm und bei den kurzen auf etwa 5 cm genau zu bestimmen.

Bei den nach dieser Methode angestellten Messungen erhielt man nun nicht mehr wie bei der Abzweigungsmethode dieselbe Wellenlänge für die primäre Schwingung, wenn man verschiedene secundäre Kreise anwandte, sondern jeder benutzte Kreis gab einen andern Werth der Wellenlänge und zwar nahmen diese Werthe zu, wenn man die Dimensionen der Kreise vergrösserte. Als Beispiel diene folgende Messungsreihe:

	= 3 cm;	Wellenlänge = 0,2 m (nicht sicher bestimmbar)
Durchmesser des secundären Kreises	= 5 " ;	" = 0,4 "
	= 7 " ;	" = 0,55 "
	= 14 " ;	" = 1,0 "
	= 19 " ;	" = 1,1 "
	= 35 " ;	" = 1,9 "
	= 58 " ;	" = 2,8 "

Grössere secundäre Kreise gaben weniger scharfe Resultate, doch schien den Durchmessern 75 cm resp. 100 cm, eine Wellenlänge von etwa 3,2 m resp. 4,5 m zu entsprechen.

Während also die Durchmesser der secundären Kreise zwischen 3 und 100 cm variierten, erhielt man Wellenlängen, die zwischen 0,2 und 4,5 m schwankten, d. h. durch die pri-

märe Schwingung werden in dem Draht stehende Wellen der verschiedensten Längen erregt, die, soweit die Beobachtungen reichen, ein Intervall von mehr als 4 Octaven umfassen. Man wird also schliessen dürfen, dass in dem primären Leiter nicht nur eine einzige Schwingung vorhanden ist, sondern dass sehr viele verschiedene Schwingungen nebeneinander bestehen, die man durch die secundären Kreise in ihrer Wirkung voneinander trennen und deren Wellenlängen man dann bestimmen kann. Es wäre also die Schwingung im primären Leiter ähnlich der Schwingungsbewegung, die weisses Licht erzeugt, das sich ja auch in viele einzelne Schwingungen verschiedener Wellenlänge zerlegen lässt.

Benutzte man statt des primären Leiters *C* die Leiter *A* und *B* und übertrug deren Schwingungen in ganz analoger Weise auf den Draht *L*, wie das bei *C* geschehen war, so erhielt man auch für sie stets dieselben Werthe der Wellenlänge wie für *C*, wenn man dieselben secundären Kreise verwandte, sodass es also in der That nur von den Dimensionen des secundären Kreises abhängt, welche der im Draht vorhandenen Wellen man bestimmt.

Dies Resultat ist schon von den Herren Sarasin und de la Rive<sup>1)</sup> in etwas engeren Grenzen gefunden worden. Sie arbeiteten mit zwei verschiedenen primären Leitern und mit secundären Kreisen, deren Durchmesser zwischen 26 und 100 cm lagen. Ihre Kreise standen senkrecht zu der Richtung des ausgespannten Drahtes, dabei sind die entstehenden Funken bedeutend kleiner als in der von uns benutzten Stellung und die Messung deshalb schwieriger. Vergleicht man die Zahlen der Herren Sarasin und de la Rive über den Zusammenhang zwischen den Dimensionen der secundären Kreise und der Wellenlänge mit den Ziffern der obigen Tabelle, so findet man sie durchweg etwas kleiner, was zum Theil wohl von den grösseren Capacitäten der Enden unserer secundären Kreise herrühren mag. Jede Kugel des Funkenmikrometers sass nämlich mit einer Messingfassung auf einem Glasstab auf und jede der beiden

1) Sarasin u. de la Rive, Arch. des sc. phys. et nat. 3 per. 13. p. 113. 1890.

Hülsen trug zwei Klemmschrauben, sodass eine nicht unbedeutliche Metallmasse das Ende des secundären Kreises bildete. — Zu bemerken ist noch, dass bei unseren Beobachtungen einzelne der secundären Kreise manchmal nur sehr schlecht auf die Schwingungen im Draht anzusprechen schienen, sodass man den Eindruck gewann, als ob die verschiedenen Schwingungen verschieden gut ausgebildet wären, doch liess sich Sicheres darüber nicht feststellen.

Da nun bei den Schwingungen so verschiedener primärer Leiter, wie *A*, *B* und *C* derselbe secundäre Kreis stets dieselbe Wellenlänge ergab und da somit alle drei Leiter dieselben Partialschwingungen enthalten mussten, war zu vermuthen, dass sich diese noch für anders gestaltete Leiter nachweisen lassen würden und es schien nicht ohne Interesse, zu untersuchen, wie weit man die Dimensionen des primären Leiters verkleinern könne, ohne dass die Schwingungen aufhörten erkennbar zu sein. Um diese Frage zu beantworten, liess man die Entladungen des Inductoriums einfach zwischen zwei Hohlkugeln aus Messing von 8 cm Durchmesser erfolgen, deren eine von dem senkrecht zur Verbindungslinie der Kugelcentren ausgespannten Draht *L* direct berührt wurde. Auch hier konnte man mit den verschiedenen secundären Kreisen wieder das Vorhandensein aller der durch die Kreise bestimmbaren Wellen constatiren. Endlich gelang dies sogar noch, als der Funke des Inductoriums zwischen Hohlkugeln von nur 4 cm Durchmesser übersprang. Jedesmal erhielt man z. B. für den secundären Kreis von 7 cm Durchmesser  $\lambda = 0,5$  m, für den Kreis von 58 cm Durchmesser  $\lambda = 2,8$  m.

Für noch kleinere Kugeln war keine solche Bestimmung mehr möglich, vielleicht nur weil die in den Schwingungen bewegten Electricitätsmengen zu klein waren.

Bei allen den bisher beschriebenen Beobachtungen mit den fünf in ihren Dimensionen und ihrer Gestalt so sehr verschiedenen primären Leitern musste, sollte überhaupt eine Wellenlängebestimmung möglich sein, als nothwendige Bedingung dafür gesorgt werden, dass der Funke möglichst hell, weiss glänzend und mit lautem, scharfen Knall übersprang, wie das Hr. Hertz geschildert hat. Zur Erzeugung

solcher Funken erwies sich am geeignetsten ein Inductionsapparat mittlerer Grösse, der ungefähr 30 cm lang war und zwischen Kugeln Funken von etwa 2 cm gab. Der Unterbrechungsfunke kam zwischen Platinstiften zu Stande, und von seiner Regulirung hing es wesentlich ab, ob die gewünschten Funken auftraten. Dieser kleinere Inductionsapparat zeigte sich vermuthlich auch deshalb für unseren Zweck passender als ein grosser Ruhmkorff mit Quecksilberunterbrecher, weil bei jenem die Unterbrechungen sehr viel schneller geschahen, als bei diesem und so die Intensität der entstehenden Schwingungen mehr auf gleicher Höhe gehalten wurde.

Aus dem bisher gesagten darf man wohl schliessen, dass überall da, wo die Entladungen des Inductoriums in der durch die hellen glänzenden und knallenden Funken charakterisirten Weise erfolgen, electrische Schwingungen der verschiedensten Schwingungsdauer entstehen. Unsere Beobachtungen haben sie in einem Intervall von vier Octaven nachgewiesen, doch umfasst das gewiss nicht alle im Draht vorhandenen Schwingungen, vielmehr wird man durch Steigerung der Dimensionen der secundären Kreise die obere Grenze der nachweisbaren Wellenlängen noch hinausschieben können. Die untere Grenze wird sich wohl weniger leicht mit der benutzten Methode noch beträchtlich erweitern lassen, da, wie schon gesagt, bei Anwendung sehr kleiner secundärer Kreise die in ihnen bewegten Electricitätsmengen so klein und die Funken so schwach werden, dass eine Feststellung von Maximal- und Minimalintensitäten derselben nur mit Mühe gelingt.

Unter all den Partialschwingungen endlich, deren nach dem obigen ein primärer Leiter fähig ist, gibt es eine ausgezeichnete, welche in dem mit ihr in „Resonanz“ befindlichen secundären Kreise das Maximum der Funkenintensität liefert, die wir deshalb im ersten Theile die Hauptschwingung genannt haben und deren dort für die grösseren Leiter *A* und *B* gemessene Wellenlänge sich genähert aus den Dimensionen der Leiter berechnen lässt.

Der Einfluss des umgebenden Mittels auf die Wellen im Draht.

Nach Hrn. Hertz's<sup>1)</sup> Versuchen gehen die electricischen Bewegungen der sehr schnellen Schwingungen wesentlich an der Oberfläche des Drahtes vor sich und dringen kaum in das Innere des Metalls ein. Es ist somit zu erwarten, dass eine Aenderung des Mediums, in dem die electricischen Bewegungen stattfinden, diese modificiren wird und es ist dies durch Hrn. Hertz's Nachweis der Brechung electricischer Schwingungen in einer Art schon bewiesen.

Die Methode der Abzweigung gab nun ein Mittel an die Hand, in bequemer Art zu untersuchen, in welcher Weise die Wellenlänge der Schwingungen sich mit dem Medium ändert. Zu dem Zweck wurde eine Rinne von Zinkblech 8 m lang, 7 cm breit, 4 cm hoch und oben offen hergestellt, die in der Mitte durch eine Zinkwand der Länge nach in zwei Abtheilungen getheilt war. Durch jede Abtheilung führte man isolirt einen der vom Funkenmikrometer ausgehenden Abzweigungsdrähte. Die ganze Rinne wurde mit einer isolirenden Flüssigkeit gefüllt, sodass die Drähte ganz von ihr umgeben waren und dann verschob man den kurzen, isolirten Brückendraht auf ihnen, bis der Funken im Mikrometer ein Maximum erreichte. Dabei ging der Brückendraht zum Theil freilich nicht durch die isolirende Flüssigkeit, da aber das Funkenmaximum stets dann auftrat, wenn die Brücke um die Länge einer stehenden Welle für den in die Flüssigkeit tauchenden Draht verschoben wurde, so maass man am Funkenmikrometer in der That, kurz zu sagen, die Wellenlänge in der Flüssigkeit. Vor Füllung der Rinne hatte man sich überzeugt, dass die Wellenlänge für die Abzweigungsdrähte in Luft nicht durch die umgebende Metallmasse der Rinne geändert wurde.

Als isolirende Flüssigkeiten benutzte man Alkohol, Ricinusöl und Petroleum. Im ersteren liessen sich überhaupt keine Wellenlängen messen, wahrscheinlich weil er zu gut leitete. Für Ricinusöl war die Bestimmung von  $\lambda$  auch sehr unsicher und ergab etwa  $\lambda_A = 1,4$  m für den primären Lei-

1) H. Hertz, Wied. Ann. 37. p. 395. 1889.

ter *A*, sodass sich die Wellenlänge in Luft zu der in Ricinusöl wie 2,9 zu 1,4 verhielt; doch ist dieser Werth jedenfalls sehr ungenau. Besser gelangen die Versuche mit Petroleum. Hier liessen sich beide primäre Leiter *A* und *B* verwenden. Es fanden sich  $\lambda_A = 2,0$  m;  $\lambda_B = 1,0$  m. Man hat folglich:

für den primären Leiter *A*:

$$\frac{\text{Wellenlänge in Luft}}{\text{Wellenlänge in Petroleum}} = \frac{2,9}{2,0} = 1,45,$$

für den primären Leiter *B*:

$$\frac{\text{Wellenlänge in Luft}}{\text{Wellenlänge in Petroleum}} = \frac{1,4}{1,0} = 1,4,$$

welche Zahlen gut miteinander übereinstimmen.

Da das Arbeiten mit so langen Gefässen sehr unbequem war, wurde versucht die Wellenlänge statt in geraden ausgespannten Drähten in Drahtspiralen zu messen, die als Abzweigungen an dem Funkenmikrometer angebracht wurden. Zwei Messingdrähte von je 9,9 m Länge wurden zu zwei Spiralen mit je 110 Windungen gerollt und diese isolirt in einen grösseren Zinkkasten gelegt. Ein starkes Messingblech, zwischen zwei Windungen jeder Spirale eingeklemmt, verband beide und wurde wieder so lange verschoben, bis Funkenmaxima im Mikrometer auftraten. Bei Anwendung des primären Leiters *A*, resp. *B* erhielt man als der Wellenlänge ihrer Hauptschwingungen entsprechend in Luft  $\lambda_A = 45$  Windungen,  $\lambda_B = 20$  Windungen. In Petroleum ergab sich  $\lambda_A = 35$ ,  $\lambda_B = 14$  Windungen. Demnach mit Spiralen bestimmt ist:

für den primären Leiter *A*:

$$\frac{\text{Wellenlänge in Luft}}{\text{Wellenlänge in Petroleum}} = \frac{45}{35} = 1,3,$$

für den primären Leiter *B*:

$$\frac{\text{Wellenlänge in Luft}}{\text{Wellenlänge in Petroleum}} = \frac{20}{14} = 1,4.$$

Diese Quotienten, welche in gewissem Sinne das Brechungsverhältniss der electrischen Wellen für Petroleum, be-

zogen auf das von Luft als Einheit, angeben, haben fast dieselbe Grösse wie der optische Brechungsquotient, der für unser Petroleum mit dem Abbe'schen Totalreflectometer und für die *D* Linie zu 1,437 bestimmt wurde.

Für Ricinusöl erhielt man (wieder nur wenig sicher) mit den Spiralen und dem primären Leiter *A* als Verhältniss der Wellenlängen in Luft und Oel 45:27, d. h. 1,7, während der optische Brechungsquotient 1,533 war. Es findet hier wenigstens die Abweichung beider Quotienten gegen die Quotienten für Petroleum in demselben Sinne statt. Freilich pflanzen sich nach den Versuchen des Hrn. Hertz<sup>1)</sup> die electrischen Wellen in einem Drahte bedeutend langsamer als in der freien Luft fort und wir können deshalb nur im uneigentlichen Sinne bei unseren Versuchen von Wellenlängen in Luft, resp. Petroleum etc. reden, vielmehr muss es genauer heissen, Wellen in von Luft, resp. Petroleum etc. umgebenem Draht. Es ist deshalb auch die Bedeutung, welche die Uebereinstimmung der Brechungsquotienten für electrische und optische Wellen hat, noch nicht klar und es muss vor allem späteren Versuchen überlassen bleiben, zu zeigen, ob diese Uebereinstimmung für Petroleum nur eine zufällige ist, oder ob sie sich allgemein für Isolatoren ergibt. Jedenfalls aber zeigen die Versuche wieder, wie gering oder gar nicht vorhanden, der Einfluss des Stoffes des Leiters ist, in dem sich die electrischen Wellen fortpflanzen (denn ob die Drähte aus Eisen, Nickel, Kupfer, ob dick oder dünn, war für die Wellenlänge gleichgültig) und wie bedeutend und ausschlaggebend die Natur des die Leiter umgebenden Mediums ist.

Fassen wir die Resultate der Untersuchung zusammen, so ergibt sich:

1) Eine bestimmte, durch die Art des Funkens erkennbare Art der Entladung eines Inductoriums erzeugt electrische Schwingungen der verschiedensten Wellenlänge, die sich über ein Intervall von vielen Octaven erstrecken.

2) Unter allen diesen Schwingungen befindet sich eine von den Dimensionen der Leitersysteme, zwischen denen die

1) H. Hertz, Wied. Ann. 34. p. 566. 1888.



Oscillationen stattfinden, abhängige Schwingung von grösster Intensität, deren Wellenlänge sich durch die Methode der Abzweigung für grössere Leitersysteme leicht bestimmen lässt.

3) Die electrischen Wellen in oder besser auf einem Drahte ändern ihre Länge, wenn sich das den Draht umgebende Medium ändert, z. B. das Medium 2 an die Stelle von 1 tritt und zwar vielleicht so wie optische Wellen ihre Länge ändern, wenn sie aus dem Medium 1 in das Medium 2 gelangen.

Tübingen, Phys. Inst., August 1890.

**V. Ueber Tropfelectroden;  
von Ferdinand Braun.**

I. Wenn ein electricischer Strom aus verdünnter Schwefelsäure in Quecksilber austritt, so erfolgt eine Bewegung des Quecksilbers im Sinne einer Zunahme der Capillarconstante. Bringt man dieselbe Bewegung durch mechanische Kräfte hervor, so entsteht ein Strom, welcher gleichfalls aus der Flüssigkeit in das Quecksilber austritt. Die electrocapillare Bewegung und der electrocapillare Strom sind daher nicht zu einander reciprok — sonst müsste die Stromrichtung die umgekehrte sein. Reciprok dagegen ist zur Bewegung die electricische Ladung, welche die capillare Fläche durch Bewegung annimmt (und welche man als die durch den Strom hervorbrachte Polarisisation betrachten könnte), wie dies Lippmann ausführlich gezeigt hat. — Die durch v. Helmholtz aufgestellte Theorie der Erscheinungen geht von der Anschauung aus, dass die electricische Doppelschicht an der capillaren Grenzfläche durch electrostatische Kräfte eine ähnliche Wirkung — Oberflächenspannung und Normaldruck — hervorruft, wie dies nach den gebräuchlichen Theorien der Capillarität durch die zwischen den Flüssigkeitstheilchen wirkenden Molecularkräfte geschieht. Da die electricischen Kräfte wesentlich wie eine moleculare Abstossung wirken, so muss die „natürliche“ electricische Belegung wie eine Verkleinerung der Capillarconstante die Erscheinungen beeinflussen. Lässt sich die Doppelschicht beseitigen, so wächst daher die Capillarconstante und erreicht ihren Maximalwerth, wenn das Moment der Doppelschicht gleich Null geworden ist. Ist dies der Fall, so gibt auch eine Oberflächenänderung des Quecksilbers keine electricische Störung mehr (Tropfstrom). Dieser Helmholtz'sche Satz ist irrthümlicher Weise öfters so aufgefasst worden, als ob man aus dem Ausbleiben eines Tropfstromes auf die Gleichheit des Potentials zwischen Quecksilber und Flüssigkeit schliessen könne, während er

nur zum Schlusse berechtigt, dass das Moment der Doppelschicht bei Stromdurchgang constant bleibt.

Man mag nun die Erscheinungen auffassen im Anschluss an die Lippmann'sche und Helmholtz'sche Theorie, oder nach der früheren Vorstellung, dass electrolytisch ausgeschiedene Stoffe die Ursache der mechanischen Bewegung seien, man kommt von beiden Standpunkten aus zu dem Schlusse, dass eine unpolarisirbare flüssige Electrode keine electrocapillare Bewegung und auch keinen Tropfstrom geben kann. Diese Bedingungen lassen sich leicht herstellen, wenn man z. B. etwas Zink in Quecksilber auflöst und dann in einer Zinksalzlösung tropfen lässt. Vor einiger Zeit habe ich eine Anzahl Versuche, welche auch das erwartete Resultat ergaben, mehr zu meiner eigenen Orientirung angestellt. In dem mir erst kürzlich zugegangenen Aprilheft der *Ann. de chim. et de phys.*<sup>1)</sup> theilt Hr. Pellat ähnliche Beobachtungen mit. Er zieht aus denselben einen Schluss, dem ich nicht zustimmen kann. Dies gibt mir Veranlassung, von meinen Versuchen, welche über die des Hrn. Pellat noch etwas hinausgehen, einiges mitzutheilen.

Löst man kleine Quantitäten Zink oder Kupfer oder Cadmium in Quecksilber auf, so erhält man Lösungen, welche an Fluidität dem reinen Quecksilber nicht nachstehen und welche in den Salzlösungen der betreffenden Metalle, wie natürlich, unpolarisirbar sind. Lässt man dieselben in den zugehörigen Lösungen tropfen, so entsteht kein in Betracht kommender Strom. Dazu genügen schon minimale Mengen fremder Metalle; z. B. hatte ich versucht, auf directem Wege Kupfer in Quecksilber zu lösen; das Amalgam gab auch wirklich in Kupfervitriollösung nur 1 Scalenth. Tropfstrom, während reines Quecksilber 25 Scalenth. zeigte. Um den Kupfergehalt beurtheilen zu können, schüttelte ich eine Portion des Amalgames mit Quecksilbernitratlösung längere Zeit aus, konnte aber in der Flüssigkeit kein Kupfer nachweisen, sodass ich anfang zu glauben, es möchte überhaupt Kupfer aus dem Amalgam auf diesem Wege nicht zu entfernen sein. Ich überzeugte mich aber durch Zusatz von Spuren eines

1) Pellat, *Ann. de chim. et de phys.* (6) 19. p. 556. 1890.

auf electrolytischem Wege hergestellten Amalgames, dass nach kurzem Schütteln Kupfer in der Quecksilbersalzlösung nachweisbar war.

Als Amalgame von bekannter Zusammensetzung wurden benutzt Kupfer- und Zinkamalgam ca. 0,1 Proc., Cadmiumamalgam ca. 0,18 Proc. Metall enthaltend; dieselben aber auch öfters auf  $\frac{1}{8}$  verdünnt, ohne wesentliche Aenderung in den Erscheinungen. Der Tropfstrom ist, wie dies auch Hr. Pellat fand, sehr klein; z. B. gab:

$\text{Zn}   \text{ZnSO}_4   \text{Zn amalgam ruhend}$	0,0094 Volt	1 <sup>se</sup> am Electrom.
$\text{Zn}   \text{ZnSO}_4   \text{ " tropfend}$	0,014 bis 0,019 Volt	1,5 " "
$\text{Cu}   \text{CuSO}_4   \text{Cu amalgam ruhend}$	0,020 "	2,2 " "
$\text{Cu}   \text{CuSO}_4   \text{ " tropfend}$	0,010 "	1,2 " "
$\text{Cd}   \text{CdSO}_4   \text{Cd amalgam ruhend}$	0,0917 "	10,3 " "
$\text{Cd}   \text{CdSO}_4   \text{ " tropfend}$	—	10,1 " "
$\text{Cd}   \text{CdJ}_2(6\%)   \text{ " ruhend}$	—	9 " "
$\text{Cd}   \text{CdJ}_2(6\%)   \text{ " tropfend}$	—	9 " "

Das Electrometer gab für 1 Lat-Clark 160 bis 190 Scalth. an.

Die Cadmiumamalgame geben je nach ihrer Concentration, wie schon von Lindeek<sup>1)</sup> beobachtet, ziemlich erhebliche Potentialdifferenzen in derselben Salzlösung. Ist eine solche zwischen dem oberen und unteren Amalgam des Tropfapparates vorhanden, so ändert sich dieselbe aber nicht, sobald man das Tropfen einleitet; dies fand ich sowohl für die Lösung des Cadmiumjodids in Wasser, wie in Amylalkohol.

Hr. Pellat zieht den Schluss, dass ein Metall gegen die Lösung eines seiner Salze keine Potentialdifferenz zeige. Die an den Polen eines Daniell beobachtete Potentialdifferenz z. B. rühre daher nur von der Potentialdifferenz der Metalle und der Lösungen untereinander. Man hätte damit eine bequeme Methode, die electriche Erregung von Metallen gegeneinander zu bestimmen. Doch kann ich diesen Satz nicht zugeben. Ohne auf die Begründung des Hrn. Pellat näher einzugehen, spricht gegen ihn das Folgende: Bekanntlich

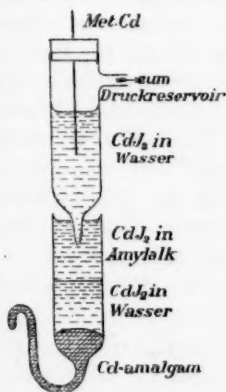
1) Lindeek, Wied. Ann. 35. p. 311. 1883.

geben auch Combinationen vom Typus  $\text{Zn} | \text{ZnSO}_4 | \text{ZnCl}_2 | \text{Zn}$  oder  $\text{Zn} | \text{ZnSO}_4 \text{ conc.} | \text{ZnSO}_4 \text{ verd.} | \text{Zn}$  electromotorische Kräfte. Diese müsste nach Hrn. Pellat's Auffassung dann nur der electricen Differenz der beiden Lösungen entsprechen. Man sieht aber nicht ein, warum sich eine unpolarisirbare Salzlösung anders verhalten soll wie ein flüssiges unpolarisirbares Amalgam, warum also nicht auch zwischen den Lösungen die Potentialdifferenz gleich Null sein müsste. Dann würden aber die Ströme solcher Combinationen unerklärlich sein. Verwendet man Salzlösungen, die sich nicht miteinander mischen, so lässt sich dieser Schluss direct prüfen; z. B. ist die folgende Zusammenstellung verwendbar:

$\text{Cd amalgam} | \text{CdJ}_2 \text{ in } \text{H}_2\text{O} | \text{CdJ}_2 \text{ in Amylalkohol} | \text{Cd amalgam}.$

Sie besteht nur aus flüssigen Bestandtheilen, welche sämmtlich miteinander eine scharfe Grenze geben, sodass man jeden in den anderen kann tropfen lassen. Dabei hat die Kette eine electriche Kraft von nahezu 0,1 Volt. — Nach Hrn. Pellat's Auffassung könnte die Potentialdifferenz, welche obige Kette zeigt, daher nur noch an der Contactstelle der beiden Salzlösungen liegen. Lässt man aber die eine derselben in die andere tropfen, so zeigt sich kein Tropfstrom, z. B. gab die nebenstehende Anordnung 11,5 Scalenth. Ablenkung am Electrometer, so lange die Lösung nicht tropfte. Wurde sie nur mit einem bis zu 2 Atmosphären gehenden Ueberdruck aus der feinen Oeffnung herausgepresst, so zeigte das Electrometer die gleiche Ablenkung, mit höchstens 0,3 oder 0,5 Scalenth. Schwankung.

Eine ähnliche Kette ist  $\text{Au} | \text{AuCl}_4\text{H} \text{ in } \text{H}_2\text{O} | \text{AuCl}_4\text{H} \text{ in Nitrobenzol} | \text{Au}$ . Die beiden Salzlösungen geben für eine kurze Zeit auch eine scharfe Grenze; allmählich wird dieselbe aber (wenigstens solange noch Diffusion des Salzes zum Wasser stattfindet) milchig durch Nitrobenzol, welches mit dem Goldchlorid gleichzeitig aus der Lösung hinausgeführt wird und



sich voraussichtlich im Wasser ausscheidet in dem Maasse, in welchem das Salz aus ihm diffundirt.<sup>1)</sup> Auch diese Lösungen geben, wie ich mich vor längerer Zeit gelegentlich überzeugete, keinen Tropfstrom. Der entsprechende Versuch mit Goldamalgam lässt sich wohl nicht ausführen, weil das Quecksilber sofort Gold aus der Lösung ausfällen würde. Doch wird man nicht bezweifeln, dass, wären nicht diese chemischen Bedingungen seiner Ausführbarkeit hindernd, auch Goldamalgam in Goldlösungen keinen Tropfstrom gäbe. Es lässt sich sicherlich noch eine ganze Reihe anderer ähnlicher Combinationen finden, welche gegen Hrn. Pellat's Satz sprechen.

II. Hr. Lippmann hat, von der Annahme ausgehend, dass Veränderungen in der Grösse einer Quecksilberelectrode electricische Strömungen im Gefolge haben, die Grösse der dabei auftretenden Electricitätsmenge aus dem Princip der Erhaltung der Energie und dem der Electricität berechnet. Die folgenden einfachen Rechnungen bieten daher nichts wesentlich Neues; ich darf sie aber vielleicht mittheilen, weil sie durchsichtiger wie die allgemeineren Operationen Lippmann's die Nothwendigkeit des Tropfstroms darthun und bestimmter zeigen, wo eigentlich sein Ursprung zu suchen ist. Die Folgerungen scheinen mir zur Klärung eines vielfach discutirten Punktes beitragen zu können.<sup>2)</sup>

Die beiden folgenden Thatfachen werden nicht bestritten: 1) Wird eine Quecksilberfläche als Kathode polarisirt, so ändert sich die Capillarconstante. 2) Man muss zu dem Ende der Quecksilberfläche eine gewisse Electricitätsmenge zuführen. Dass dieselbe nicht einfach *hindurchgeführt* wird, muss man zugeben, weil man von der polarisirten Fläche die als Polarisationsstrom bezeichnete Electricitätsmenge

1) Diese Beobachtung beweist, dass bei der Diffusion im Allgemeinen nicht nur das Salz wandert. Es wandert vielmehr mit ihm auch das Lösungsmittel.

2) Vgl. die Discussionen zwischen den Herren Ostwald, Exner und Tuma, J. Brown in der Zeitschr. für phys. Chem. 3. p. 354. 1889; 4. p. 570. 1889. Rep. der Phys. 25. p. 142. 597. 1889; 26. p. 91. 1890. Phil. Mag. 28. p. 384. 1889.

wieder erhalten kann. Wie man sich das Ansammeln der Electricitätsmenge vorstellen will (etwa enthalten in abgeschiedenen Ionen), bleibt unbestimmt. Ich will diese Electricitätsmenge setzen als (1)  $E = (V_1 - V_0) O \cdot \gamma$ , wo  $V_1 - V_0$  die Potentialänderung der Quecksilberfläche,  $O$  deren Oberfläche,  $\gamma$  eine Constante bedeutet. Diese Gleichung darf innerhalb eines gewissen Gebietes jedenfalls benutzt werden. Was man sich unter  $\gamma$  vorstellen will, ist gleichgültig; sie wird gewöhnlich als Capacität der Flächeneinheit bezeichnet. Statt  $V_1 - V_0$  soll stets  $V_1$  geschrieben werden, d. h. das Potential der polarisirten Quecksilberfläche gegen eine nicht polarisirte, in der gleichen Flüssigkeit befindliche gerechnet werden (wie z. B. bei der Fuchs'schen Methode der Polarisationsbestimmung). Die Schlüsse sind übrigens unabhängig von dem angenommenen speciellen Ausdruck für  $E$ , im Wesentlichen auch von der Form für  $T$ , welche ich benutze.

Es sei  $T$  die Oberflächenspannung für das Potential  $V$ ;  $T_0$  für  $V = 0$ . Dann ist  $T = T_0 + f(V)$ , wobei  $f(V) = 0$  wird für  $V = 0$  und  $T$ , wie Hr. Lippmann zuerst gezeigt hat, einen Maximalwerth  $T_m$  erreicht für  $V = V_m$ , um dann wieder abzufallen. Im aufsteigenden Aste der Curve kann man nahezu  $T$  als lineare Function von  $V$  ansehen und setzen:

$$T = T_0 + \frac{T_m - T_0}{V_m} V.$$

Nach Hrn. Quincke's Messungen ist für Hg|verd. Schwefelsäure etwa:

$$T_0 = 35 \text{ [Mrgew/Mill]} = 35.9,81 \text{ [GS}^{-2}] = 34,3 \text{ [GS}^{-2}].$$

$V_m$  ist nach Hrn. Lippmann ungefähr = 1 Volt,  $T_m = 1,47 T_0$ ; daher:

$$T = T_0 + 0,47 \cdot 34,3 \text{ [GS}^{-2}/\text{Volt]}. \quad T = T_0 + \frac{\partial T}{\partial V} V.$$

Man kann gegen Hrn. Lippmann's Bestimmungen einen Einwand erheben; wenn ein Strom von geringer electromotorischer Kraft, welcher durch eine grosse Fläche eintritt und an einer kleinen Quecksilberkathode austritt, durch die Polarisation compensirt wird, so nimmt Lippmann an,



dass der Potentialsprung bis auf eine zu vernachlässigende Grösse an der kleinen Fläche liege. Es wäre gewiss sicherer, die Potentialdifferenz gegen eine stromfreie Quecksilberfläche zu messen. Doch zeigen unsere sonstigen Erfahrungen, wenn sie auch der thermochemischen Erklärung noch immer Schwierigkeiten bieten, dass dadurch kein wesentlicher Fehler entstehen kann.

Ändert man die Oberflächengrösse von  $O_1$  auf  $O_2$ , so wird dabei eine Arbeit geleistet  $\int_{O_1}^{O_2} T dO$ . Diese Arbeit soll im Folgenden für zwei verschiedene Fälle benutzt werden:

a) man lässt  $V$  constant; Arbeit  $= T(O_2 - O_1)$  (2a)

b) " "  $E$  " ; "  $= \int_{O_1}^{O_2} T dO$ , wo

$$\int T dO = T_0(O_2 - O_1) + \frac{\partial T}{\partial V} V_1 O_1 \log \frac{O_2}{O_1}. \quad (2b)$$

$V_1$  bezeichnet das Potential der Oberfläche  $O_1$ .

Es sollen nun die Arbeiten für bestimmte endliche Änderungen eines polarisirten Quecksilbertropfens berechnet werden, indem man verschiedene Wege einschlägt.

a) Man lade bei  $O_1$  von Null auf  $V_1$  und bringe dann  $O_1$  bei constant gehaltenem  $V_1$  auf  $O_2$ . Die Arbeiten sind

$\alpha$ ) Electriche Ladungsarbeit  $\frac{1}{2} E_1 V_1$ ;

$\beta$ ) Capillar-mechanische Arbeit nach (2a);

$\gamma$ ) Indem sich  $O_1$  auf  $O_2$  vergrössert, muss eine Electricitätsmenge  $(E_2 - E_1)$  zugeführt werden mit dem Arbeitsaufwande  $\frac{1}{2} V_1 (E_2 - E_1)$ .

Daher sind die sämmtlichen Arbeiten:

$$(a) = \frac{1}{2} E_1 V_1 + T_0(O_2 - O_1) + \frac{\partial T}{\partial V} V_1(O_2 - O_1) + \frac{1}{2} V_1(E_2 - E_1).$$

b) Man bringe, während  $V = 0$  ist,  $O_1$  auf  $O_2$  und lade dann mit  $V_1$ . Man hat:

$\alpha$ ) Capillar-mechanische Arbeit  $T_0(O_2 - O_1)$ ;

$\beta$ ) Electriche Ladungsarbeit  $\frac{1}{2} E_2 V_1$ .

Daher die gesammte Arbeit

$$(b) = T_0(O_2 - O_1) + \frac{1}{2} E_2 V_1.$$

Setzt man (a) = (b), so fallen die electriche Arbeiten

für sich fort, und man wird auf die den Thatsachen widersprechende Bedingung

$$\frac{\partial T}{\partial V} V_1 (O_2 - O_1) = 0$$

geführt; d. h. es muss auf einem der Wege ausser den aus den Annahmen gefolgerten Arbeiten noch eine Arbeit  $L$  vorhanden sein, wo

$$L = - \frac{\partial T}{\partial V} V_1 (O_2 - O_1)$$

ist. Diese Arbeit kann sich nur auf die Fläche vom Potential  $V_1$  beziehen (daher das gleich eingeführte negative Zeichen); sie kann ferner, da an der Gültigkeit des Ausdrucks für die capillaren Arbeiten kein Zweifel sein kann, nur eine electricische Arbeit darstellen. Denkt man sich, diese electricische Arbeit werde benutzt, um eine Electricitätsmenge  $\eta$  vom Potential  $V_1$  auf das Potential Null überzuführen, so wäre

$$L = \eta V_1 = - \frac{\partial T}{\partial V} V_1 (O_2 - O_1), \text{ oder:}$$

$$(3) \quad \eta = - \frac{\partial T}{\partial V} (O_2 - O_1),$$

d. h. es entsteht bei der Oberflächenänderung  $\Omega = O_2 - O_1$  eine durch Gl. (3) gegebene Electricitätsmenge, unabhängig vom Potential der Fläche, d. h. auch auf einer nicht polarisirten Electrode. Das ist die vom Tropfstrom erzeugte Electricitätsmenge. —

Noch in einer anderen Weise kann man sich von der Nothwendigkeit eines Tropfstroms überzeugen, freilich mit Benutzung der Gl. (1). Nämlich:

c) Man lade bei der Oberflächengrösse  $O_1$  von Null auf  $V_1$ , verändere bei constanter Electricitätsmenge die Oberfläche in  $O_2$  und bringe dann wieder auf das Potential  $V_1$ . Dann hat man:

$\alpha$ ) Electricische Ladungsarbeit  $\frac{1}{2} E_1 V_1$ ;

$\beta$ ) Capillare Arbeit nach Gl. (2b).

$\gamma$ ) Die Electricität ist auf Potential  $V_2$  gegangen, die electricische Energie also auf  $\frac{1}{2} E_1 V_2$ .

$\delta$ ) Das Potential geht auf  $V_1$  und die Electricitätsmenge auf  $E_2$ , die electricische Energie also auf  $\frac{1}{2} E_2 V_1$ .

Sämmtliche zugeführte Arbeiten sind daher

$$(c) = \frac{1}{2} E_1 V_1 + T_0 (O_2 - O_1) + \frac{\partial T}{\partial V} V_1 O_1 \log \frac{O_2}{O_1} - \frac{1}{2} E_1 V_2 + \frac{1}{2} E_2 V_1.$$

Setzt man (c) = (b), so kommt:

$$\frac{1}{2} E_1 (V_1 - V_2) = - \frac{\partial T}{\partial V} V_1 O_1 \log \frac{O_2}{O_1},$$

oder wegen (1):

$$V_1 \frac{O_2 - O_1}{O_2} = - \frac{\partial T}{\partial V} \cdot \frac{1}{\gamma} \log \frac{O_2}{O_1}.$$

Diese Gl. kann offenbar nicht für jedes beliebige  $O_2/O_1$  erfüllt sein; man muss also auch hier annehmen, dass noch auf dem einen oder auf beiden Wegen eine nicht in Rechnung gesetzte Arbeit hinzukomme. Die Gl. ist in Uebereinstimmung mit (3), wenn man in letzterer  $V$  der Bedingung  $E = \text{Const}$  entsprechend sich ändern lässt. —

Die Grösse  $-\partial T/\partial V$  hat Lippmann die Capacität der Flächeneinheit für constantes Potential genannt; er hat gezeigt, dass sie diese Bedeutung hat für jede beliebige functionelle Abhängigkeit des  $T$  von  $V$ . Lässt man die Oberfläche bei constantem Potential  $V$  von Null bis  $O$  wachsen, so fiesst ihr die Electricitätsmenge  $E = -(\partial T/\partial V)O$  zu. Nimmt man nach (1) an  $E = \gamma VO$ , wo  $dE = \gamma O dV$  ( $O = \text{Const}$ ), so folgt  $\gamma = (1/O)(\partial E/\partial V) = -(\partial^2 T/\partial V^2)$ , in Uebereinstimmung mit Hrn. Lippmann's Relationen.

Der Tropfstrom unterscheidet sich von einer Reihe anderer Vorgänge, bei denen Electricität entsteht, z. B. der Induction dadurch, dass bei letzterer die gesammte electromotorische Kraft, welche einer gewissen Aenderung entspricht, constant ist, beim Tropfstrom dagegen die Electricitätsmenge. Bei ersterer hängt daher die bewegte Electricitätsmenge, beim Tropfstrom das erzeugte Potential von den weiteren Versuchsbedingungen ab. Denkt man, eine sich vergrössernde Quecksilberoberfläche lade einen Körper von endlicher Capacität, so wird das Potential nur so lange steigen können, bis  $\partial T/\partial V = 0$  ist, weil dann keine Electricität mehr nachfliesst; d. h. die oberste Grenze der electrischen Kraft des Tropfstroms ist gleich derjenigen electro-

motorischen Kraft, welche das Maximum der Capillarconstante hervorruft.<sup>1)</sup>

Nimmt man mit Herrn von Helmholtz an, dass für  $\partial T / \partial V = 0$  die natürliche electrische Doppelschicht durch diejenige der Polarisation neutralisirt ist, so folgt daraus nun auch ohne weitere Hypothesen, dass die electromotorische Kraft des Tropfstroms die natürliche Potentialdifferenz zwischen Quecksilber und Flüssigkeit misst, und es ergibt sich so die Berechtigung der von Ostwald benutzten und vielfach angezweifelte Methode. — Hr. von Helmholtz hat diesen Satz in der Form ausgesprochen, dass wenn eine schnell abtropfende und übrigens isolirte Quecksilbermasse durch die tropfende Spitze mit einem Electrolyten in Berührung ist, das Quecksilber und der Electrolyt kein verschiedenes Potential haben können. Er hat aber dabei angenommen, dass wenigstens „unter den bisher eingehaltenen Bedingungen der Versuche, Quecksilber in Berührung mit electrolytischer Flüssigkeit sich nur langsam positiv gegen die Flüssigkeit ladet“. Diese Annahme scheint mir aber gar nicht nöthig zu sein. Man kommt zum gleichen Resultat, wenn man sich vorstellt, das rasche Abtropfen habe nicht den Zweck, die vollständige Ausbildung der Doppelschicht zu verhindern, sondern nur zu bewirken, dass die entwickelten Electricitätsmengen, auch wenn sie gleichzeitig zu sonstigen Ladungen, event. sogar zu dauerndem Strom verwendet werden, doch möglichst denjenigen Zustand der Tropffläche herbeiführen, wo  $\partial T / \partial V = 0$  ist und daher die electromotorische Kraft ihren Maximalwerth erreicht. — Würde man die Tropfelectrode in einen Stromkreis schalten und so auf constantem Potential  $\varphi$  halten, so würde eine mit der Flüssigkeit — wie bei der Fuchs'schen Methode — verbundene stromlose Quecksilberfläche gegen die Tropfelectrode nicht etwa die Potentialdifferenz der natürlichen Belegung zeigen, wie es sein müsste, hätte der Satz in der obigen Form allgemeine Geltung, sondern die Differenz  $p + t + \text{Flüssigkeit} / \text{Hg}$ , wenn  $p$  die electromotorische Kraft der Polarisation,  $t$  die des Tropfstroms bedeutet. Nur für  $p = -t$  hat Flüssigkeit und Tropfelectrode glei-

1) Vgl. A. König, Wied. Ann. 16. p. 35. 1882.

ches Potential;  $p$  ist dann der Potentialsprung Hg/Flüssigkeit.

Alle hier gezogenen Schlüsse verlieren ihre Gültigkeit, sobald die Fläche unpolarisierbar ist;  $\partial T/\partial V$  hat dann keine Bedeutung mehr, weil es überhaupt unmöglich wird, einen von Null verschiedenen Werth für  $dV$  herzustellen.

III. Die obigen Betrachtungen zeigen die Nothwendigkeit des Tropfstromes, sie geben aber keinen Aufschluss über seine Entstehungsweise. Geht man darauf ein, so lässt sich Folgendes sagen: 1) Da weder die capillaren Arbeiten, noch die Arbeiten der von aussen zugeführten electricischen Ladungen zur Erklärung ausreichen, sondern eine weitere electricische Arbeit  $L$  angenommen werden muss, so liegt die Deutung derselben als eine Dehnungsarbeit electricischer, nicht durch äussere Ladung hinzugefügter Schichten nahe; dies ist die v. Helmholtz'sche Auffassug. 2) Alle diejenigen Momente müssen ohne Belang sein, welche umgekehrt die Oberflächenspannung als Function der Polarisation nicht beeinflussen. Man hat sich gefragt<sup>1)</sup>, ob der in Wasser gelöste Sauerstoff nicht die Tropfströme erklären könne und ob in ganz luftfreiem Wasser dieselben nicht vielleicht vollständig aufhören würden. Wenn man aber nicht bezweifelt, dass auch in ganz luftfreiem Wasser noch Polarisation und Aenderung der Capillarconstante eintritt, so muss man auch schliessen, dass in ihm ein Tropfstrom entsteht.

Gibt man in consequenter Anwendung des Faraday'schen Gesetzes eine Wasserstoffabscheidung durch jeden dem Tropfen zugeführten Strom zu, so scheint es mir nur folgerichtig — wenn auch nicht direct bewiesen — anzunehmen, dass die reciproke Erscheinung gleichfalls darauf beruhe. Von diesem Standpunkte aus wird man sich auch vorstellen müssen, dass die Bildung neuer Oberflächenschichten von electrolytischen Processen begleitet ist. Wenn also z. B. Zinkamalgame positiv electricisch wäre gegen  $\text{ZnSO}_4$ -Lösung, so müsste eine neu entstehende Grenzfläche des Amalgams

1) Vgl. Quineke, Pogg. Ann. 153. p. 161. 1874. v. Helmholtz, Abhandl. 1. p. 935.

sich mit Zink belegen, während die Gruppe  $\text{SO}_4$  in der Flüssigkeit bleibt. Wir beobachten am Electrometer das durch diese „Polarisation“ geänderte Potential, nicht den Ladungsstrom selber. Aendern sich, wie im vorliegenden Falle, die Potentiale auf dem Amalgam und der Flüssigkeit nicht dauernd, so zeigt das Electrometer trotz dieser inneren Strömungen keine Schwankung an. Die Verhältnisse sind ebenso, als wenn die Pole einer galvanischen Kette durch einen Widerstand  $r$  mit den Platten eines Condensators, diese wieder durch einen Widerstand  $\rho$  mit den Quadranten eines Electrometers verbunden wären. Aendert man die Capacität des Condensators, so fließt Electricität durch die Widerstände  $r$  und  $\rho$  und zwar nach dem umgekehrten Verhältnisse von  $r$  und  $\rho$  (falls nicht die Capacität des Electrometers gegen jede endliche Grösse verschwindet). Der Widerstand  $r$  hat hier moleculare Dimensionen,  $\rho$  ist stets eine endliche Grösse. Das Electrometer zeigt daher nichts an. Einen Ausschlag gibt es nur, wenn durch die direct nicht beobachtbaren Ströme eine Polarisation und durch diese eine Ladung entsteht (ähnlich, wie auch nicht der beobachtete Strom, sondern die Ladung, welche ihn wie einen Polarisationsstrom erscheinen lässt, reciprok ist zur electrocapillaren Bewegung, vgl. p. 448).

Nach dieser Anschauung müsste auch Quecksilber, welches in eine Salzlösung eintropft, eine chemische Zersetzung bewirken, z. B. Zn, Cu etc. aus der Lösung an seiner Oberfläche abscheiden. Unter meinen Beobachtungen habe ich keine gefunden, welche dieser Vorstellung widerspräche; z. B. gab:

Zn	$\xrightarrow{\text{ZnSO}_4}$	Hg ruhend	142 <sup>se</sup>	
"	"	Hg tropfend	69	
Cu	$\xrightarrow{\text{CuSO}_4}$	Hg ruhend	29	0,263 V.
"	"	Hg tropfend	2	0,018 "
Cd	$\xrightarrow{\text{CdSO}_4}$	Hg ruhend	110	0,978 "
"	"	Hg tropfend	42	0,374 "

Man kann diese Zahlen immer so auffassen, als ob das tropfende Quecksilber in seinem electrischen Verhalten dem des reinen Metalles näher komme (es aber nicht ganz erreicht)

d. h. sich mit einer Schicht des Metalles bekleide. Auch andere Beobachtungen fügen sich dieser Auffassung; tropft z. B. Hg in KJ-Lösung und fügt man der Lösung in der Nähe der Tropfelectrode eine Spur freies Jod hinzu, so fällt die electromotorische Kraft des Tropfstromes, als ob das gebildete Kaliumamalgam durch das freie Jod depolarisirt werde (aber auch, wie natürlich, durch Superposition des galvanischen und des Tropfstromes erklärbar). Unterstützt wird sie auch durch die folgende Beobachtung: Hg in concentrirter  $\text{NH}_3$ -Flüssigkeit gab gegen ruhendes einen wie gewöhnlich von der Tropfelectrode nach unten fließenden Strom von freilich überraschend geringer Kraft (1,5 Scalenth. = 0,024 Volt); an der Tropfelectrode wäre also Wasserstoffbelegung anzunehmen; Zusatz von  $\text{NH}_4\text{Cl}$  brachte den Ausschlag auf 3 Scalenth. Fügte man aber wenig Pyrogallussäure hinzu, welche bekanntlich freien Sauerstoff energisch wegnimmt, so stieg der Ausschlag auf 14 Scalenth.

Auch die Lippmann'sche Beobachtung, dass die Einstellung von Quecksilbermenisken, wenn sie mit dem ruhenden Quecksilber leitend verbunden sind, so viel schärfer erfolgen und der Randwinkel des Quecksilbers dann gleich Null wird, sprechen für die gemachte Annahme, wenn man folgenden Versuch heranzieht. Polarisirt man Quecksilber in einem einige Millimeter weiten Rohre durch Kräfte, welche sichtbare Zersetzung hervorrufen, so sieht man Folgendes: Zunächst bilden sich an der Kuppe kleine Gasbläschen; sobald die Kuppe polarisirt ist, geht der Strom zu den geschützteren Rändern und so schreitet die Gasentwicklung bis zu mehreren Millimetern längs der an dem Glasrohre anliegenden Quecksilbersäule herunter. Wenn so bei sichtbarer Zersetzung das Quecksilber von der Wand frei wird und den Randwinkel Null bekommt, so ist es wohl naturgemäss, auch umgekehrt die Beobachtung, dass der Randwinkel bei Polarisationen unterhalb des Maximalwerthes in Null übergeht, aus derselben Ursache zu erklären.<sup>1)</sup>

---

1) Die nach Absendung meines Aufsatzes publicirten hübschen Versuche von Arons (Ber. Berl. Akad. 28. p. 969. 1890; dieses Heft p. 473) geben den directen Beweis dafür.



Von Interesse wäre es natürlich, könnte man die bei Aenderung der Quecksilberoberfläche supponirte chemische Zersetzung, auf welche wir nur indirect aus den electricischen Erscheinungen schliessen, direct nachweisen. Lässt man Quecksilber in angesäuerte KJ-Lösung tropfen, so müsste sich das Quecksilber mit K (vielleicht secundär mit H) beziehen und Jod in der Flüssigkeit bleiben. Man könnte denken, dass das Jod sich durch Lösung und Diffusion in der Flüssigkeit verbreite und so durch Stärke nachweisbar würde, umsomehr als Wasserstoff sich direct mit Jod nicht verbindet. Ein Versuch in dieser Richtung ergab auch thatsächlich schon nach wenigen Minuten unzweifelhafte Jodreaction; als jedoch die Lösung möglichst ausgekocht war und während des Versuchs ein dauernder Strom von Kohlensäure durch sie geleitet wurde, blieb die Reaction so gut wie vollkommen aus. Sie rührte also nur daher, dass der gelöste Sauerstoff durch die Quecksilbertropfen ozonisirt wurde. Auch Versuche nach ähnlichen Ueberlegungen angestellt, um in  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ -Lösung durch Lackmustinctur eine chemische Zersetzung zu erweisen, verliefen resultatlos. Doch sind diese negativen Ergebnisse schon aus dem Grunde nicht beweisend, als auch der gleiche Tropfstrom, nach dem seine beiden Electroden ausserhalb verbunden waren — wo also unzweifelhaft electricische Strömung vorhanden war — keine sichtbare Farbenänderung bewirkte. Die Electricitätsmengen sind eben ausserordentlich klein; es berechnet sich z. B. die durch die Bildung von 1 qcm Oberfläche erzeugte Electricitätsmenge zu  $1,6 \cdot 10^{-6}$  Coulomb. Sie ist äquivalent mit  $0,185 \cdot 10^{-6}$  ccm Wasserstoff und würde eine Gasschicht von  $1,85 \cdot 10^{-6}$  mm Dicke liefern.

Dies wäre die Ladung, welche das Maximum der Capillarconstante herbeiführt. Denn für 1 qcm wäre erforderlich die Electricitätsmenge

$$(4) \quad E = - \int_0^{V_m} \frac{\partial^2 T}{\partial V^2} dV = \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_{V_m} - \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_0 = \left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_0.$$

Für letztere Grösse ist der p. 454 angegebene Zahlenwerth eingesetzt worden.

Andererseits sind wir gezwungen, uns die Doppelschichten der electricisch geladenen Ionen als so fest miteinander verbunden zu denken, dass auch bei einem längeren Weg, den die Tropfen durch die Flüssigkeit durchfallen, keine Trennung derselben eintritt. Wäre dies nicht so, so müsste das Wiederzusammenfließen der Tropfen gleichfalls einen Strom liefern. Die Erfahrung zeigt aber, dass es für den Tropfstrom gleichgültig ist, ob man die den Tropfen regen aufsammlende Quecksilberfläche oder eine ganz ruhige, durch ein Heberrohr mit der durchtropften Flüssigkeit verbundene Fläche als zweite Electrode zum Electrometer leitet; endlich geben die auffangende und die ruhige Fläche keinen Strom gegeneinander; d. h. die bei der Tropfenbildung geladenen Flächen depolarisiren sich während ihres Fallens nicht nachweisbar, und so stellt sich beim Verschwinden der Ladung nur wieder der natürliche electricische Zustand her. Von einer Polarisation, welche durch äussere Kräfte hervorgerufen ist und welche zeitlich von selber verschwindet, unterscheidet sie sich dadurch, dass bei letzterer die Ionen durch den Strom auf die Entfernung der Electroden voneinander gebracht werden, während hier die electricische Strömung nur moleculare Distanzen durchläuft und daher die Ionen auch nur auf ebensolche Abstände voneinander führt. Darin allein scheint mir aber auch der Unterschied zwischen beiden Polarisationsarten zu liegen.

Tübingen, Phys. Inst., Juli 1890.

## VI. Ueber den Kathodenwiderstand; von K. Wesendonck.

Den bisher veröffentlichten Arbeiten vermochte Verfasser nicht mit Bestimmtheit zu entnehmen, ob ein von den Herren G. Wiedemann und Rühlmann gefundener polarer Unterschied auch noch bei electricischen Entladungen in hochverdünnten (mit Electroden versehenen) Räumen fortbesteht. Sicher aber erscheint die Entscheidung hierüber nicht ohne Interesse für die Frage, wie weit sich die Erscheinungen bei sehr weit getriebener Entleerung lediglich als eine Folge der äusserst geringen vorhandenen Gasmenge erklären lassen unter Geltung derselben Gesetze, denen die Vorgänge bei höheren Drucken gehorchen. Verfasser hat daher theils während des vergangenen Winters, theils im Sommer 1890 einige Versuche angestellt, welche die besagte Lücke wenigstens etwas ausfüllen helfen sollten.

Die beiden oben genannten Physiker, und später Hr. E. Wiedeman, haben bekanntlich gefunden, dass in Entladungsröhren die zur Einleitung einer Entladung nöthige Spannung merklich grösser ist, wenn die Anode electricisirt, die Kathode dagegen abgeleitet wird, als im umgekehrten Falle. Um diesen oberhalb des sogenannten kritischen<sup>1)</sup> Druckes nachgewiesenen Satz auf seine Geltung in sehr weit evacuirten Räumen hin zu prüfen, wurde folgende Versuchsanordnung getroffen. Gewöhnliche gläserne, mit Aluminium-electroden versehene Geisslerröhren von verschiedenen Dimensionen dienten als Entladungsgefässe, wobei für vergleichbare Versuche natürlich stets dieselbe Electrode als Kathode zu verwenden war. Zunächst wurde nun so verfahren, dass die beiden Pole der gläsernen Vacuumröhre mit denen eines Ruhmkorff'schen Funkeninductors in Verbindung standen, und zugleich mit den Electroden eines Funkenmikro-

---

1) Der kritische Druck ist bekanntlich derjenige, welcher dem Maximum der Leitfähigkeit entspricht.

meters<sup>1)</sup>, wie Fig. 1 es angibt.  $A$  und  $B$  sind die Pole des Inductors,  $a$  und  $b$  die des Funkenmikrometers,  $\alpha$  und  $\beta$  die

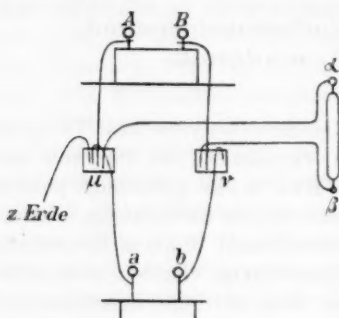


Fig. 1.

Electroden des Entladungsgefäßes,  $\mu$  und  $\nu$  mit Quecksilber zum Theil gefüllte Glasnäpfe. In jedes dieser letzteren tauchen beständig je drei Drähte, nämlich einer, der zu dem Ruhmkorff führt, ein zweiter, der mit dem Funkenmikrometer, und ein dritter, der mit einer Electrode der Geissleröhre in Verbindung

steht. Ist dann  $A$  negativer Pol für den Oeffnungsstrom, so ist  $\alpha$  bei der angegebenen Einrichtung Kathode. Taucht man nun den mit der Erde verbundenen Draht  $\lambda$  einmal in  $\mu$  und einmal in  $\nu$ , so wird cet. par. die Kathode oder die Anode abgeleitet. Diese Vertauschung wurde späterhin mittelst einer geeigneten Wippe<sup>2)</sup> vorgenommen, die man nur auf die eine oder andere Seite umzulegen braucht, um Kathode oder Anode, je nach Bedarf, abzuleiten. Wurde der primäre Strom des Inductoriums commutirt, so entstand

1) Das Funkenmikrometer weicht von der gewöhnlichen Construction insofern ab, als die Zuleiter zu den Kugeln im Inneren der gläsernen Träger verlaufen (Fig. 2). Letztere sind seitlich durchbohrt, sodass

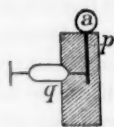


Fig. 2.

man die Klemmschraube  $q$  (zur Aufnahme der Leitungsdrähte bestimmt) durch Anschrauben mit dem Zuleiter  $p$  verbinden kann. Die Schraffurung deutet eine isolierende Füllmasse (Ebonit) an, der die aufschraubbare Kugel  $a$  direct aufsitzt, ohne dass irgend ein Theil des Zuleiters freiliegt und mit der Luft in Berührung sich befindet. Man hat dann keine Funken oder Büschel von den Zuleitern aus zu befürchten, auch wenn man diese möglichst dünn wählt. Die Zuleiter sind etwas excentrisch innerhalb der Träger angebracht, um auch kleine Polkugeln zum Contact bringen zu können, ohne zu dünne und daher biegsame Träger anbringen zu müssen. Verwendet wurden bisher Kugeln von 1, 2, 6 cm Durchmesser.

2) Die Wippe besteht aus zwei einander senkrecht kreuzenden dicken

bei  $\alpha$  die Anode, während sonst alles gleich blieb. Bei den Versuchen näherte man nun die beiden Polkugeln der Funkenmikrometer einander soweit mittelst einer feinen Mikrometerschraube, dass die weit entleerte<sup>1)</sup> Geisslerröhre im verfinsterten Zimmer dunkel erschien, wenn der eine Pol abgeleitet. Nun wurde nachgesehen, ob bei Verbindung der anderen Electrode mit der Erde etwa die Röhre wieder leuchtete. Trat dies ein, dann war offenbar anzunehmen, dass bei Ableitung des letzteren Poles die Entladung leichter eintritt, als im umgekehrten Falle. Solche Versuche leiden allerdings an gewissen Schwierigkeiten, indem sowohl der Widerstand der Funkenstrecke, wie der Entladungsröhren leicht Veränderungen aufweist. So kann es kommen, wenn bei einer Stellung der Wippe die Röhre dunkel ist und nun beim Umlegen wieder Licht auftritt, dass die in letzterem Falle eingetretene Entladung den Widerstand verringert, und nun auch bei der ersten Lage der Wippe die Röhre leuchtet. Man muss alsdann die Kugeln des Funkenmikrometers einander weiter nähern, um wieder wie früher Dunkelheit zu erhalten. Längeres Arbeiten sowohl, wie andauerndes sich selbst Ueberlassen der Geisslerröhre haben leicht Aenderungen in deren Leitvermögen zur Folge. Daher werden immer wieder Neueinstellungen des Funkenmikrometers nöthig. Auch geht wohl das anfangs vorhandene Licht aus, oder erhellen sich bisweilen scheinbar ganz unmotivirt die sonst dunkeln Röhren für eine kurze Zeit, um dann wieder in Finsterniss zu versinken, und dergleichen Störungen mehr.

Kupferdrähte  $a_1 a_2$  und  $b_1 b_2$ , Fig. 3, die Enden von  $a_1 a_2$  tauchen beständig in zwei, aus einem Paraffinklotz ausgehöhlte Löcher  $\alpha$  und  $\beta$ , letzteres enthält etwas Quecksilber und ist zur Erde abgeleitet. Von  $b_1 b_2$  taucht je nach der Lage das eine ( $b_1$ ) in das Quecksilber des Loches  $\delta$  oder das andere Ende ( $b_2$ ) entsprechend in  $\gamma$  ein.  $\delta$  ist mit dem Quecksilbergefass  $\mu$  (Fig. 1),  $\gamma$  mit  $\nu$  verbunden. Taucht z. B.  $b_1$  in  $\delta$  ein, so ist also  $\mu$  und daher auch die Electrode  $\beta$  abgeleitet.

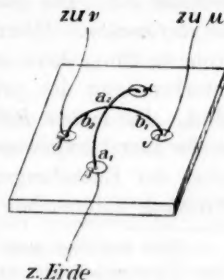


Fig. 3.

1) Dieselbe stand mit einer Töpler'schen Pumpe in Verbindung.

Trotzdem man indessen mit solchen Unregelmässigkeiten zu kämpfen hat, lassen sich doch in manchen Fällen ganz unverkennbar bestimmte Aufschlüsse über das Verhalten der Entladungen erlangen, nur muss man zahlreiche Versuche anstellen und lediglich solche miteinander vergleichen, bei denen Aenderungen in der Leitfähigkeit sich nicht störend geltend gemacht haben.

Bei einer Geissleröhre von ca. 50 cm Länge und einer gleichmässigen Weite von ca. 12,1 mm fand sich mit grosser Regelmässigkeit *eine Erleichterung der Entladungen bei Ableitung der Anode*. Stellte man bei isolirter Anode das Funkenmikrometer so ein, dass eben die Röhre dunkel erschien oder nur einzelntes Aufleuchten sich zeigte, so erschien bei Ableitung der Anode alsbald dieselbe in continuirlicher Weise erhellt. Dieses Resultat ergab sich bei sehr zahlreichen Versuchen immer wieder, es blieb bestehen welche Electrode man auch zur Kathode machte, ferner als man die Röhre durch eine ganz neue von fast denselben Dimensionen ersetzte. Ebenso brachte Aufschrauben anderer Kugeln auf das Funkenmikrometer, Vertauschen derselben, weiteres Auspumpen, Erneuerung der Drahtverbindungen keine Aenderung des Ergebnisses. Als dagegen eine Röhre von ca. 60 cm Länge und ca. 21 mm Dicke eingeführt wurde, stellte sich nur anfangs und deutlich nur, wenn die eine Electrode als Kathode diente, dasselbe Resultat wie früher ein. Nach öfteren Versuchen und fortgesetztem Evakuiren der Röhre zeigten sich keine Unterschiede mehr zwischen abgeleiteter Kathode und Anode, ja schliesslich trat deutlich eine Umkehrung der Verhältnisse ein. *Die geladene isolirte Anode<sup>1)</sup> gab jetzt leichter das Aufleuchten*. Hiermit hatte nicht etwa der Schliessungsstrom zu thun, denn schon einmalige mit der Hand bewirkte Unterbrechung des primären Stromes gab das gleiche Resultat. *Die weitere Röhre verhielt sich also entschieden anders*, als die zuerst angewendete engere. Um aber ferner das Verhalten der Entladungen unter möglichst geringem Einfluss der Glaswände untersuchen zu können, wurde die Röhre durch

1) Dies widerlegt auch den Einwand, den man erheben könnte, dass polare Unterschiede an dem Funkenmikrometer die Begünstigung der negativen Electrode bewirkt hätten.

eine Glaskugel von ca. 10 cm Durchmesser ersetzt mit frei hineinragenden Electroden. Hier zeigte sich gleich von Anfang an keine regelmässige Begünstigung der isolirten Kathode, nur ganz vereinzelt fand sich unter vielen Versuchen eine solche, sondern vielmehr fast völlige Gleichheit der Entladungsbedingungen. Zumeist war eine kleine Bevorzugung der isolirten Anode zu bemerken, indem, wenn letztere noch schwaches gleichmässiges Leuchten zeigte, das Licht beim Umlegen der Wippe stark zuckte, einzelne Male auch ganz verschwand. Man musste indessen, um diesen stets nur recht geringen Unterschied zu bemerken, bei dem Funkenmikrometer<sup>1)</sup> sehr fein einstellen. Somit ist wohl als erwiesen anzusehen, dass für den Uebergang der Electricität zwischen den Electroden eines Entladungsgefässes der polare Unterschied in dem Sinne, wie ihn die Herren G. Wiedemann und Rühlmann nachgewiesen haben, unterhalb des kritischen Druckes nicht mehr unbedingt fortbesteht, und daher die Entladungsbedingungen von denen bei höheren Dichten sich nicht unerheblich unterscheiden. Die Ursache des Kathodenwiderstandes in weit evakuirten Räumen ist dann wohl auch wesentlich verschieden von der des gewöhnlichen Leitungswiderstandes der Gase anzusehen.

Es schien wünschenswerth, das soeben angegebene Beobachtungsergebniss noch in anderer Weise zu bestätigen, indem man die Entladungen einer Influenzmaschine<sup>2)</sup> verwendete, deren einer Pol *A* (Fig. 4) zur Erde abgeleitet. Von dem anderen Pol *B* ging ein Draht  $\alpha$  zur einen Electrode  $\mu$  des Vacuumgefässes, dessen andere  $\nu$  ebenfalls mit der Erde in Verbindung stand. Von *B* führte ein starker Kupferdraht zu einem Quecksilbergefäss *a*, das mit der einen Kugel  $\epsilon$  eines Funkenmikrometers *C* communicirte, während die

1)\* Eine Drehung der Trommel der Mikrometerschraube um einen Theilstrich gab eine Verschiebung der einen Polkugel um fast genau  $\frac{1}{100}$  mm.

2) Hierbei bleiben die Electroden allerdings stets mit Ladung desselben Vorzeichens versehen, während bei dem Inductorium die Electroden ganz entladen und sogar durch den Schliessungsstrom schwach entgegengesetzt electricisirt werden. Die Entladungsbedingungen sind also in beiden Fällen nicht ganz identisch.



zweite <sup>1)</sup> abgeleitet war. An die jedesmalige Kathode desselben wurde eine Spitze  $q$  geklebt, und diese so mittelst der Mikrometerschraube eingestellt, dass das Licht in dem Entladungsgefäße eben verschwand, resp. erschien. Solche Versuche wurden dann wiederholt, indem man einen Polwechsel

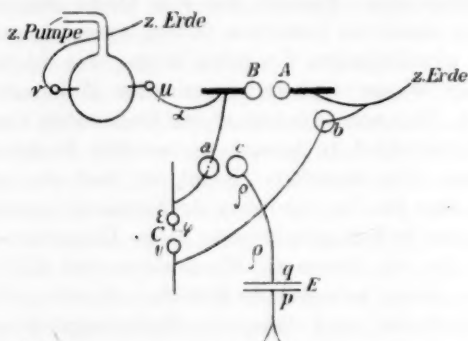


Fig. 4.

der Maschine durch entsprechendes Laden der Belege bewirkte, Draht  $\alpha$  an die Electrode  $v$  brachte und  $\mu$  ableitete. Dann blieb dieselbe Electrode in beiden Versuchsreihen Kathode. Um zu unterscheiden, ob in dem einen oder anderen Falle verschiedene Spannungen zur Einleitung der Entladungen nöthig waren, diente ein Peltier'sches Electrometer  $E$ , das durch Influenz erregt wurde. Ein kupferner, an einem Glasarm befestigter Deckel  $q$  stand in passender Entfernung der Kugel  $\mu$  des Electrometers<sup>2)</sup> gegenüber, ein Kupferdraht  $\rho$  führte von  $q$  zu einem Quecksilbernapf  $c$ . Ein kupferner Bügel, der mittelst eines isolirten Hebels gehoben und gesenkt werden konnte, gestattete  $a$  und  $c$  zu verbinden und damit Maschine und Deckel  $q$ . Bei dieser Art der Versuchsanordnung machten sich die unvermeidlichen Widerstandsänderungen noch störender bemerklich als bei den früheren Experimenten, und gelang es bisher nicht, mit den engeren Geissleröhren zu einem bestimmten Resultate zu gelangen. Ein besserer Er-

1) Ueber das Quecksilbergfäß  $b$ .

2) Ein abgeleiteter Stanniolschirm schützte gegen Einwirkung der übrigen geladenen Theile der Versuchsanordnung.

folg war bei dem kugelförmigen Gefässe zu verzeichnen, obgleich man auch hier noch mit Unregelmässigkeiten zu kämpfen hatte. Wenn direct nach dem Auspumpen beobachtet wurde, fand sich gewöhnlich der Widerstand zunächst bedeutend höher als später, nachdem einige Zeit Entladungen durchgegangen waren, wobei dann allmählich ein ziemlich constanter Zustand eintritt, der vergleichbare Beobachtungen gestattet. Alsdann wurde festzustellen versucht, bei welchem Ausschlage des Electrometers bei sorgfältiger Verschiebung der Pole des Funkenmikrometers zuerst Leuchten auftrat, resp. wann solches verschwand. Es zeigte sich hierbei die erste Spur von Licht, resp. verlosch der letzte Schimmer zumeist sowohl bei abgeleiteter Anode wie abgeleiteter Kathode unter fast denselben Spannungen, *gewöhnlich mit geringer Begünstigung der isolirten Anode*. Aber es fanden sich auch ganz entschiedene Ausnahmen, ausgeprägter, als sie nach den früheren Versuchen zu erwarten gewesen wären. Dennoch thun auch diese Beobachtungen mit der Influenzmaschine ganz entschieden dar, *dass die leichtere Entladung der Kathode in weiteren Gefässen nicht mehr die Regel ist*.

Es wurde schon angedeutet, dass der Einfluss der Glaswände bei dem verschiedenen Verhalten der Entladungen in weiteren oder engeren Gefässen in Betracht zu ziehen sei. Einige specielle Versuche sollten das Verhalten von Glasgefässen mit nur einer Electrode, also von Entladungen lediglich zwischen Glaswand und Electrode, etwas näher beleuchten. In einen grossen Glaskolben *A* (Fig. 5) war oben in den Hals eine Glasröhre *a* eingeschmolzen, in der unten ein ca. 3 cm langer Platindraht eingeschmolzen sich befand, ein seitlich angebrachtes Rohr *b* führte zu einer Geissler'schen Pumpe. *a* wurde mit Wasser gefüllt, eine ebenfalls mit Wasser gefüllte Glasröhre mit an den Enden eingekitteten Kupferdrähten *C* (Fig. 6)

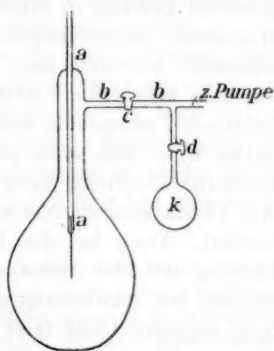


Fig. 5.

diente als Zuleiter von dem Quecksilbergefäß *a* (Fig. 4) zu der Röhre *a* (Fig. 5). Hahn *c* und ein zweiter an der Pumpe



Fig. 6.

befindlicher blieben bei den Versuchen verschlossen, um Entladungen zum Pumpenquecksilber

hin zu verhindern, *K* ist ein Kugelgefäß, das ebenfalls abschliessbar und mit mehreren Electroden versehen ist. Bereits Magnus hatte gefunden, dass unter den gegebenen Umständen bei Verbindung mit dem einen Pole eines Inductoriums, dessen anderer Pol abgeleitet ist, sich schön ausgebildetes negatives Glimmlicht zeigt, mochte der isolirte Pol Anode oder Kathode sein, die Erscheinungen sind in beiden Fällen kaum zu unterscheiden. Schon einmalige Unterbrechung des primären Stromes genügt, um auch bei positiver Ladung der Electrode negatives Glimmlicht auftreten zu lassen, also der Schliessungsstrom hat nichts damit zu thun. Ohne Magnus' Beobachtungen zu kennen, fand Verfasser mittelst eines Inductoriums dasselbe Verhalten, und beobachtete das Licht im rotirenden Spiegel. Dieser zeigte natürlich getrennte Bilder den einzelnen Entladungen des Inductoriums entsprechend, aber durchaus keine Trennung des negativen von dem positiven Lichte. Es findet also das negative Glimmlicht auch nicht etwa seine Erklärung bei positiver Ladung in einem Zurückströmen positiver auf die Glaswände übergegangener Electricität während der Zwischenzeit zwischen zwei Inductorentladungen. Man muss vielmehr sehr schnell aufeinander folgende alternirende Entladungen<sup>1)</sup> annehmen, wenn man die übliche Erklärung festhalten will. Ein meist nur schwach leuchtender Rückstrom erscheint allerdings, wenn man den Glaskolben, der wie eine Art Verstärkungsflasche wirkt, erst ladet und dann ableitend berührt. Doch hat die Lichterscheinung bei directer Verbindung mit der Influenzmaschine nur wenig Aehnlichkeit mit der bei Anwendung des Inductoriums. Das eigenthümliche negative Licht fehlt fast ganz selbst bei negativer Ladung, positives und negatives Leuchten sind vielmehr einander

1) Interessant wäre es, die betreffende Erscheinung in einem sehr schnell rotirenden Spiegel zu beobachten.

sehr ähnlich, wenn auch nicht völlig gleich. Bei gehöriger<sup>1)</sup> Verdünnung glimmt die Electrode auf ihrer ganzen Länge und ist von einem grauen Nebel umgeben, der bei negativer Ladung ausgedehnter und heller auftritt, als bei positiver. Charakteristisch für die positive Ladung ist die entschieden bläuliche Farbe, mit der die Electrode selbst glimmt, während bei negativer Electrisirung sich die glimmende Electrode kaum von dem Nebel unterscheidet. Blaues negatives Glimmlicht erscheint gar nicht, höchstens ist eine Spur des hier hufeisenförmigen dunkeln Kathodenraumes zu sehen. Doch tritt das negative Licht voll ausgebildet auf, sobald man die Leitung zu *K* öffnet und dessen eine Electrode ableitet, schwächer schon, wenn man die Hand an den Glaskolben, besonders dessen Hals, legt, falls die Electrode in diesen Fällen als Kathode dient. Flackern des Lichtes, Auftreten leuchtender Punkte an der Electrode verstärkt das negative Licht, wohl weil unter solchen Umständen die Dichte des Electricitätsstromes an der Electrode verstärkt wird. Wenig Bemerkenswerthes gab indessen die Einschaltung einer kleinen Funkenstrecke in die Zuleitung; bei positiver Ladung trat alsdann ein dunkler Raum um die Anode herum auf, ebenso, wenn man Funken zwischen den einander genäherten Polen der Maschine überspringen liess. Der rotirende Spiegel zeigt gar keine Intermissionen, sondern ein zusammenhängendes Lichtband, welches auch das Vorzeichen der Ladung sein mochte.

Es wurde nun untersucht, ob für das Eintreten, resp. Verschwinden des Lichtes bei positiver und negativer Ladung ein polarer Unterschied sich zeigte. Es fand sich in der That bei sehr geringen Dichten eine Begünstigung der negativen Electricität, wenn die Entladungen in ruhiger gleichmässiger Weise vor sich gehen. Auch hier hat man wieder

---

1) Bei 9 mm Druck zeigt positiv wie negativ einen hellen Punkt an der Spitze der Electrode, bei 8 mm schon glimmt die ganze positive Electrode, negative Ladung gab nur einen blauen Stern an deren Ende und an einer mittleren Stelle. Bei abnehmendem Drucke vergrösserte sich besonders die negative Erscheinung, es tritt am oberen Ende eine neue leuchtende Stelle hinzu. Bei einem kleinen Bruchtheile eines Millimeters sind die drei Lichtpunkte noch zu erkennen, die aber bei fortgesetztem Evakuiren endlich verschmelzen.

mit Uuregelmässigkeiten zu kämpfen, wie bei den früheren Versuchen an der Kugel mit zwei Electroden. Besonders das positive Licht zeigt oft weit unter der Spannung, bei der es erscheint, wenn man die Kugeln des Funkenmikrometers voneinander entfernt, noch vereinzelt ganz schwaches Aufleuchten, wenn man die Tension allmählich erniedrigt, um das Verschwinden des Lichtes zu beobachten. Dennoch aber wirkt die Glaswand unverkennbar im grossen Ganzen in dem Sinne einer Erleichterung des Austretens der negativen Electricität.

## VII. *Beobachtungen an electrisch polarisirten Platinspiegeln; von Leo Arons.*

I.<sup>1)</sup> Zum Edison'schen Versuch. (Reibung an polarisirten Electroden.)

1. Im Jahre 1874 beobachtete Edison<sup>2)</sup>, dass die Reibung zwischen einem Metallstück und einem gegen dasselbe gedrückten Papierstreifen, der mit einer leitenden Flüssigkeit, z. B. Sodalösung, getränkt war, sich verminderte, wenn man vom Papier zum Metall einen electrischen Strom fließen liess. Werner Siemens schrieb diese Thatsache electrolytisch ausgeschiedenem Gas zu. Wesentlich ist es zu bemerken, dass die Siemens'schen Versuche mit einer Kette von zwei Daniellelementen angestellt wurden; ein einzelnes Element gab die Wirkung nicht. Seitdem hat sich eine Reihe von Forschern mit diesem Problem beschäftigt. K. R. Koch<sup>3)</sup> gelangt zu dem Ergebniss, „dass die Sauerstoffpolarisation am Platin und Palladium die Reibung dieser Metalle gegen eine mit Wasser oder verdünnter Schwefelsäure bedeckte Glasfläche vergrössert“; bei Wasserstoffpolarisation erhielt er im Gegensatz zu Edison und Siemens keine Wirkung. Er arbeitete aber, was zu beachten, nur mit Kräften, die zur Wasserzersetzung nicht ausreichten; in den Stromkreis war ein Galvanometer eingeschaltet, welches keinen Ausschlag geben durfte. Weitere Beobachtungen rühren von Krouchkoll<sup>4)</sup> und von Waitz<sup>5)</sup> her. Die Versuchsbedingungen wurden von beiden Forschern in der mannichfachsten Weise abgeändert; das Ergebniss ist im wesentlichen, dass eine H-Polarisation die Reibung vermindert,

1) Nach den Ber. d. Berl. Acad. (Sitz. vom 24. Juli 1890) mit Zusätzen mitgetheilt vom Hrn. Verf.

2) Vgl. Waitz, Wied. Ann. **20**, p. 285 ff. 1883.

3) Koch, Wied. Ann. **8**, p. 92. 1879.

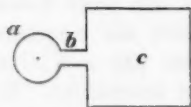
4) Krouchkoll, Compt. rend. **95**, p. 177. 1882. Ann. de chim. et de phys. (6) **17**, p. 250. 1837. Journ. de Phys. (2) **9**, p. 89. 1890.

5) Waitz, l. c. p. 286.

eine O-Polarisation dieselbe vermehrt. Beide Beobachter arbeiteten mit Kräften, die unterhalb der zu Wasserzer-  
setzung nöthigen blieben; Waitz macht die Bemerkung  
„überhaupt wird wohl nur die Unempfindlichkeit der ange-  
wandten Methode der Beobachtung des Phänomens bei klei-  
nen Polarisationen eine Schranke setzen“.

2. Um wenn möglich einen directen Einblick in die  
Vorgänge an der polarisirten Electrode zu gewinnen, ver-  
suchte ich die Methode der Newton'schen Ringe in Anwen-  
dung zu bringen.<sup>1)</sup> Hierbei leisteten mir die von Hrn. Prof.  
Kundt hergestellten Platinspiegel vortreffliche Dienste. Auf  
einem rechteckigen Stück eines solchen wurde mit dem  
Schreibdiamant eine Figur ungefähr von beistehender Gestalt  
und Grösse eingerissen.

Auf den Kreis *a* wurde eine starkwandige, unten gut  
abgeschliffene Glasröhre aufgesetzt. Die-  
selbe war vorher an ihrem unteren Ende  
auf der äusseren Mantelfläche mit etwas  
Siegelack überzogen. Wurde die Platte  
mit der Röhre auf einem Metallblech



erwärmt, so floss der Siegelack zum Theil herab und über die  
Contouren von *a* hinaus. Auf diese Weise war die Röhre,  
welche, mit Quecksilber gefüllt, als Stromzuleitung diente, mit  
der Platte durch eine Schicht fest verbunden, die ein capil-  
lares Vordringen von Flüssigkeit zum Quecksilber verhinderte.

Der auf *b* übergeflossene Theil des Siegelacks wurde  
durch einen möglichst scharfen Schnitt gegen *c* hin entfernt.  
Eine ebene, am Rande ebenfalls gut abgeschliffene Glasplatte,  
welche *c* bedeutend überragte, wurde nun auf dasselbe gelegt  
und möglichst fest gegen die Siegelackgrenze auf *b* gedrückt.  
Die ganze Vorrichtung stand schon während der letzten  
Manipulation in einer Glasschale, welche gut leitende Schwe-  
felsäure enthielt ( $\text{H}_2\text{SO}_4$  auf 3 Aq). Im Lichte einer Na-  
triumflamme konnte man scharfe Interferenzstreifen beob-  
achten, auf welche ein kleines Fernrohr mit Fadenkreuz ein-

1) Vgl. Lippmann, Journ. d. Phys. 10. p. 202. 1881. Lippmann  
geht bei seinen Versuchen von anderen Gesichtspunkten aus; auch erhielt  
er — vermuthlich wegen seiner nicht genauer beschriebenen Versuchs-  
anordnung — nicht die von mir beschriebenen Erscheinungen.



gestellt war. Der eine Pol eines Meidingeresementes wurde nun unter Einschaltung von Stromschlüssel und Wippe mit dem Quecksilber über *a* verbunden, während als zweite Electrode ein mit Platinmohr bedecktes Platinblech diente. Wurde der Stromkreis geschlossen, während *c* beispielsweise Kathode war, so trat fast unmittelbar ein Wandern der Interferenzstreifen in einer bestimmten Richtung auf; man konnte hinnen kürzester Zeit zehn Streifen und mehr vorüberwandern lassen. Wurde nun die Wippe umgelegt, so trat ein sofortiges Umkehren der Streifen in noch schnellerem Tempo ein, bis ungefähr die alte Lage erreicht war. Dann blieb eine kurze Zeit alles ruhig, bis die Wanderung wieder im ersten Sinn aufgenommen wurde. Dieses Spiel konnte beliebig oft wiederholt werden. Wir sehen hier, dass die H- und O Polarisation völlig gleich wirken. Die H-Polarisation treibt die Streifen in einer bestimmten Richtung vorwärts; lassen wir O Polarisation eintreten, so vernichtet dieselbe zunächst die bestehende H-Polarisation und führt so die Streifen in die alte Lage zurück; sobald sich aber die O-Polarisation frei weiter entwickelt, führt sie die Streifen in derselben Richtung, wie zuerst die H-Polarisation; und eine von neuem hervorgebrachte H-Polarisation bringt jetzt durch Vernichtung der O Polarisation die Streifen in ihre ursprüngliche Lage zurück. Bedienen wir uns statt der aufgelegten Glasplatte einer Linse mit grossem Krümmungshalbmesser, so lehrt uns die Erscheinung noch den Sinn der Bewegung kennen. Von der Linse, welche ich benutzte, waren zwei Segmente entfernt, sodass sie mit einer geraden Grenzfläche an den Siegellackstreifen auf *b* angedrückt werden konnte. Das ist nothwendig, da sich sonst der Polarisationsvorgang fast ganz und gar an dem nicht bedeckten Theil von *b* abspielen würde. Bei den Versuchen mit der Linse ziehen sich die Interferenzringe bei eintretender Polarisation zusammen und verschwinden einer nach dem anderen im Centrum: beim Wechsel der Stromrichtung treten sie in derselben Zahl wieder hervor, um sich nach kurzer Zeit wieder zusammenzuziehen. Die entstehende Polarisation vergrössert also die Zwischenschicht, hebt die Linse empor. Hierdurch erklärt sich in einfachster Weise die Abnahme

der Reibung, welche die früheren Beobachter bei H-Polarisation fanden. In der That gab sich diese Verminderung auch bei meinen Versuchen zu erkennen, da bei allzulanger Polarisation im nämlichen Sinne das ganze Ringsystem sich verschob, bis die Linse schliesslich vom Platinspiegel fortglitt. Wenn die früheren Beobachter bei der O-Polarisation theilweise eine Zunahme der Reibung fanden, so kann ich mir das nur so erklären, dass die O-Entwicklung nicht lange genug fortgesetzt wurde, um die vorhergehende H-Polarisation zu überwinden. Dieser Umstand ist bei den von ihnen angewendeten massiven Electroden, die sehr viel Gas zu occludiren vermochten, nicht ganz unwahrscheinlich, während ich mich bei den ausserordentlich dünnen, völlig durchsichtigen Platinschichten in weit günstigeren Verhältnissen befand.

3. Schon bei den vorhergehenden Untersuchungen konnte man gleichzeitig mit dem Verschieben der Streifen die Abscheidung ausserordentlich kleiner Gasbläschen wahrnehmen; dieselben waren mit dem Mikroskop deutlich zu erkennen, möglicherweise freilich nur durch totale Reflexion an der über ihnen liegenden Glasfläche. Wurde die aufgelegte Glasplatte oder Linse entfernt, so konnte selbst mit dem Mikroskop ein Auftreten von Gasbläschen oder eine sonstige Veränderung an der Platinschicht nicht mehr wahrgenommen werden. Da die Abscheidung von Gas bei der electromotorischen Kraft von einem Meidingerement auffällig war, versuchte ich dieselbe noch auf besser sichtbare Weise eintreten zu lassen. Zu dem Zwecke wurde die Linse mittelst Schrauben möglichst fest auf die Platinschicht gepresst. Bei Schliessen des Stromes in einem oder dem anderen Sinne verschoben sich die Interferenzstreifen nicht mehr, dagegen traten nach kurzer Zeit Gasbläschen hervor, die meist radial dem äusseren Umfang der Linse zuschossen. Die Erscheinung liess sich mit dem Anschliessen kleiner Krystalle vergleichen. Dabei blieben die Streifen zwischen den einzelnen Zügen der Bläschen scharf sichtbar. Wurde die Stromesrichtung gewechselt, so verschwanden mit einem Schlage die Bläschen; nach einer kurzen Pause traten sodann die der neuen Polarisation entsprechenden auf. Auch hier konnte das Spiel beliebig oft wiederholt werden, nur schienen die

Pausen, wie auch bei den oben beschriebenen Versuchen mit der Zeit etwas länger zu werden. Wenn die Leitung einige Zeit offen gestanden hatte, war der Vorgang wieder wie zuvor.

Ich versuchte nun mit der electromotorischen Kraft herabzugehen. Dazu bediente ich mich zunächst der von v. Helmholtz<sup>1)</sup> eingeführten Methode. Es zeigte sich aber, dass man unter den gegebenen Verhältnissen mit geringeren Kräften als einem Meidinger die Erscheinung nicht hervorrufen kann; deutlich sichtbar wurde sie bei der v. Helmholtz'schen Anordnung erst bei ca. 1,3 Dan.

Es zeigt sich also, dass die angewandte Methode zum Nachweis der Erscheinungen an polarisirten Electroden bisher<sup>2)</sup> noch unempfindlicher ist, als die Methoden der Reibungsmessung, bei welchen man bis unter 0,1 Volt herabgehen kann. Sie gibt uns aber Aufschluss über die Ursache der Erscheinungen. Denn da kein Grund vorhanden ist anzunehmen, dass die Ursache unterhalb der oben angeführten Grenze eine andere sei, als oberhalb derselben, so dürfen wir schliessen, dass die von v. Helmholtz sogenannte Doppelschicht eine geringe Hebung der darüber lagernden Platte hervorruft. Dieselbe ist aber so gering, dass ohne ein Durchbrechen dieser Schicht durch freie Gasblasen eine Verschiebung der Interferenzerscheinung nicht eintritt. Ferner übertrefft die Methode alle bisher angewandten, wenn es sich darum handelt, die durch unterhalb der theoretischen Grenze gelegenen electromotorischen Kräfte erzeugten Gasbläschen sichtbar zu machen.<sup>3)</sup>

4. Unbedingt nothwendig ist es, dass die zweite Electrode eine wesentlich grössere Oberfläche besitzt, als die zu beobachtende.<sup>3)</sup> Als ich auf einer längeren Spiegelplatte eine zweite Electrode, ein genaues Spiegelbild der ersten herstellte und beide durch einen etwa 5 mm breiten Streifen trennte, auf dem das Platin durch Flusssäure fortgeätzt wurde, erhielt ich die Erscheinungen nicht, wenn diese beiden Electroden mit den Polen der Säule verbunden waren.

1) v. Helmholtz, Wied. Ann. 11. p. 737. 1880.

2) Vgl. Abschnitt II.

3) Die gleiche Bemerkung macht Waitz, l. c. p. 302.

Dagegen gelangen die Versuche mit jeder einzelnen, wenn ihr als zweite die erwähnte platinirte Electrode gegenüber gestellt wurde. Es bieten sich verschiedene Erklärungen dieses Umstandes dar, welche ich jedoch wegen des hypothetischen Charakters derselben übergehe.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass ich mit den Wechselströmen eines Schlitteninductors, dessen primärer Kreis von einem Accumulator gespeist wurde, nicht die geringste Wirkung erhielt, selbst wenn der aus Eisendrähten bestehende Kern eingeschoben war. Dieses Ergebniss ist nach meinen Beobachtungen mit der constanten Kette selbstverständlich; nach den früheren Beobachtungen — Koch z. B. erhielt, wie erwähnt, mit H-Polarisation keine Wirkung — hätte sich auch bei Wechselströmen eine der oben beschriebenen ähnliche Erscheinung vermuthen lassen.

II. Gasentwicklung an Platinelectroden  
in verdünnter  $H_2SO_4$  bei electromotorischen Kräften  
unterhalb der theoretischen Grenze.

Der Umstand, dass bei der oben erwähnten Verzweigung nach der v. Helmholtz'schen Methode die Grenze für die zur Hervorbringung der Gasentwicklung nöthigen electromotorischen Kraft nicht nur nicht herabgedrückt werden konnte, sondern höher zu liegen schien, als bei den Versuchen ohne Verzweigung, legte die Vermuthung nahe, dass die Verzweigung selbst es sei, die störend einwirkt, indem sie zur Einschaltung grösserer Widerstände, zur Herabsetzung der Stromdichte zwingt. Dazu kam, dass ich Einwirkungen der Stomdichte auf die Vorgänge an Quecksilberelectroden vor kurzem beobachtet hatte. Ein Uförmiges Rohr tauchte bis über seinen kürzeren Schenkel in ein Becherglas mit verdünnter Schwefelsäure; reines Quecksilber in dem kurzen Schenkel bildete eine Electrode; die andere war ein platinirtes Platinblech. Wurden die beiden Electroden ohne weiteres mit den Polen eines Meidingereslementes verbunden, so beobachtete man, abgesehen von dem Steigen und Fallen des Quecksilberniveau in dem Glasrohr (0,9 cm Durchmesser), die blitzschnelle Bildung einer zähen grauen Haut, wenn das Hg Anode war, ein plötzliches Verschwinden derselben unter

Aufwirbeln kleiner Gasbläschen beim Wechsel der Stromesrichtung. Diese Erscheinungen dürften vielen Physikern<sup>1)</sup> bekannt sein; interessant sind aber die Veränderungen des Vorganges bei Einschaltung von Widerständen in den Stromkreis. Bei Einschaltung von 200 Ohm konnte man noch bei nicht allzuschnellem Umlegen der Wippe beide Erscheinungen beobachten; bei Einschaltung von 500 Ohm war leicht ein Tempo im Umlegen einzuhalten, bei dem die Quecksilberoberfläche spiegelblank blieb. Wuchs der eingeschaltete Widerstand aber auf 1000 Ohm, so vergingen bis zur völligen Bedeckung des Quecksilbers mit der grauen Haut 2 Minuten, bei 2000 Ohm 7 Minuten, während bei 5000 Ohm auch 25 Minuten noch nicht zur Ausbildung hinreichten.

Es ist wohl denkbar, dass bei weiterer Herabsetzung der Stromdichte die Bildung der grauen Haut völlig unterbleibt<sup>2)</sup>, indem secundäre Processe anderer Natur dann ausreichen, die Ansätze zur Bildung mit hinreichender Schnelligkeit fortzuschaffen. Ein ähnlicher Einfluss des Einschaltens von Widerstand in den einfachen Stromkreis liess sich nun freilich bei den von mir verwendeten Platinspiegelzellen nicht beobachten; auch bei Einschaltung grösserer Widerstände stellte sich die Gasentwicklung ein, ohne dass eine Zunahme der dazu erforderlichen Zeit mit Sicherheit festgestellt werden konnte (vgl. oben p. 477). Wohl aber konnte eine Widerstandsvergrösserung bei gleichzeitiger Nebenschaltung, wie sie die Verzweigung erfordert, störend wirken; die Ausbildung der Doppelschicht könnte wirklich den Strom ausserordentlich schwächen, wenn ein metallischer Nebenschluss zur Verfügung steht; ich erinnere hier an den bekannten Poggendorf'schen Versuch.<sup>3)</sup> In der That gelang es mir, Gasentwicklung an den oben beschriebenen Zellen zu beobachten, wenn ich ohne Verzweigung schwächere electromotorische Kräfte — unter Umständen bis herab zu 0,3 Meidinger — anwendete. Ich bediente mich hierzu einer grossen Thermosäule, von welcher nach Bedarf eine verschiedene Anzahl

1) Vgl. vor Allem Paalzow, Pogg. Ann. 104. p. 413. 1858.

2) Paschen beobachtet mit seinem Capillarelectrometer bis zu 2 Daniell (Steißwerden des Quecksilbers!); Wied. Ann. 39. p. 43. 1890.

3) G. Wiedemann, Electricität. 1. p. 394.

von Elementen benutzt werden konnte. Die Erhitzung erfolgte immer bei völlig geöffnetem Gashahn, um eine möglichst grosse Constanz der electromotorischen Kraft in den einzelnen Versuchen zu erzielen. Die jedesmal zur Verwendung kommende electromotorische Kraft wurde gemessen, indem durch eine Wippe die betreffenden Elemente der Thermosäule in den Kreis eines Galvanometers eingeschaltet wurden, der ausserdem noch einen Widerstand von 5000 Ohm enthielt; in denselben Stromkreis konnte statt der Thermosäule ein Meidingererelement eingeschaltet werden; aus den Verhältnissen der Galvanometerausschläge ergab sich die electromotorische Kraft des betreffenden Theiles der Thermosäule in Bruchtheilen des Meidingererelementes. Es muss hervorgehoben werden, dass bei Kräften unterhalb eines Meidinger nur der Sauerstoff sichtbar wurde, während der Wasserstoff nicht mehr in Gasform auftrat. Dieses Verhältniss mag darin seinen Grund haben, dass das Platin viel grössere Mengen von H als von O zu occludiren vermag, oder dass H leichter und schneller durch Convection fortgeschafft wird als O. Nachdem ich nochmals erwähne, dass ich bei einer meiner Zellen selbst noch bei 0,3 Meidinger O-Bläschen auftauchen sah, beschreibe ich die Beobachtungen an einer anderen Zelle. Bei 0,45 Meidinger war eine Gasentwicklung in derselben bei keiner Stromesrichtung zu beobachten. Bei 0,57 Meidinger ergab sich folgender Verlauf mit der Zeit:

Stromschluss	10 <sup>b</sup> — <sup>m</sup>	Platinspiegel Kathode.
	10 36	Kein Gasbläschen zu erblicken. Commutirt.
	10 42	Deutliches Auftreten von O-Bläschen.
	10 51	Sehr viel O. Commutirt.
	10 52	Alles O verschwunden. Commutirt.
	10 56	O Blasen wieder deutlich sichtbar.
	10 58	O-Blasen sehr stark. Commutirt, fast augenblickliches Verschwinden des O. Die Zelle bleibt eine Stunde geschlossen, während der Platinspiegel Kathode.
	11 58	Keine Spur von Gas. Commutirt.
	12 —	Erstes zartes Strömchen von O-Blasen.
	12 3	O-Blasen sehr deutlich.

Schliesslich möchte ich noch eines Versuchs erwähnen, bei welchem der unverzweigte Stromkreis aus einer meiner



Platinspiegelzellen (Widerstand mit Wechselströmen gemessen ca. 230 Ohm), einem Meidinger Element, einem Galvanometer von ca. 70 Ohm Widerstand, einem Zusatzwiderstand von 2000 Ohm und einer Wippe bestand. Der Strom wurde geschlossen, während der Spiegel Anode war, der Ausschlag des stark gedämpften Galvanometers ging weit über die Scala; als er schnell auf 300 Scalentheile herabgegangen war, zeigte sich O-Entwicklung; der Ausschlag nahm langsam weiter ab; als er noch 250 Scalentheile betrug, wurde commutirt. Der wieder weit über die Scala gehende Ausschlag nahm sehr schnell ab; trotzdem war er, als schon alles abgeschiedene O verschwunden war, noch jenseits der Scala. Mit beständig abnehmender Geschwindigkeit fiel der Ausschlag sodann bis auf 25 Scalentheile; hier blieb er constant, ohne dass zunächst Gasbläschen erschienen. Erst 2—3 Minuten später wurden solche (H) sichtbar; sie vermehrten sich nun langsam, ohne dass eine weitere Aenderung der Stromstärke sichtbar wurde. Der Ausschlag von 25 Scalentheilen entsprach einer Stromstärke von etwa  $10^{-5}$  Ampere. Rechnet man nach dem Ohm'schen Gesetz unter der Annahme eines Gesamtwiderstandes des Stromkreises von 2300 Ohm (vergl. oben), so ergibt sich, dass von der electromotorischen Kraft der Kette etwa 2% zur Aufrechterhaltung dieses Stromes ausreichen, also 98% zur Aufrechterhaltung der Polarisation dienen. Wenn der Platinspiegel Anode war, schien die endliche Stromstärke wesentlich höher zu sein, ein Umstand, der jedenfalls im engsten Zusammenhang mit der oben hervorgehobenen Thatsache steht, dass bei Kräften unterhalb eines Meidinger wohl O, aber nicht H sichtbar wird.

Ich habe kein Bedenken getragen, meine bisherigen Beobachtungen mitzuthellen, obgleich dieselben wohl noch einer weiteren Bearbeitung bedürftig sind, da ich nicht weiss, ob ich in der nächsten Zeit auf dem so schwierigen Gebiete der galvanischen Polarisation werde weiterarbeiten können.

Hr. Ostwald bemerkt in einem Referat<sup>1)</sup> über den ersten, bereits früher erschienenen Theil dieser Abhandlung

1) Ostwald, Zeitschr. f. phys. Chem. 6. p. 287. 1890.



zur dort beschriebenen Wanderung der Newton'schen Ringe: „Die Erscheinung rührt offenbar von der Ablagerung der Ionen auf der Platinschicht her und kann zu einem wichtigen Ergebniss führen. Da sowohl positive wie negative Ionen den Abstand vergrössern, so muss in dem Zustande, wo der Abstand ein Minimum ist, das Platin frei von Ionen, also frei von einer Doppelschicht, also endlich auf gleichem Potential, wie der Electrolyt sein. Bei der vom Verfasser eingehaltenen Versuchsanordnung ist leider nicht zu ermitteln, wie gross diese kritische Potentialdifferenz ist, da sich eine polarisirbare Electrode im Stromkreis befindet. Vermeidet man dieselbe, was gar keine Schwierigkeit macht, so wird es möglich sein, über die wahre Potentialdifferenz zwischen Platin und Schwefelsäure etwas zu erfahren, und so eines der wichtigsten Probleme des Galvanismus um ein Erhebliches der Lösung näher zu führen.“

Ich hatte absichtlich keine theoretischen Bemerkungen gemacht, da mir hierfür das Thatsachenmaterial noch zu dürftig erschien; auch jetzt, nach Mittheilung der im zweiten Theil beschriebenen Erscheinungen, würde ich davon absehen, wenn nicht das citirte Referat mich dazu veranlasste. Ich fürchte, dass sich die darin ausgesprochenen Hoffnungen nicht bewahrheiten werden. Meines Erachtens weisen sämtliche Erscheinungen nur auf eine freilich äusserst geringe Gasentwicklung unterhalb der theoretischen Grenze hin. Nehmen wir gemäss den neueren Anschauungen die  $\text{H}_2\text{SO}_4$ -Molecüle als in Ionen dissociirt an und halten wir andererseits an der von Helmholtz'schen Anschauung fest, dass die Ionen ihre electrische Ladung erst bei einer bestimmten Höhe der electromotorischen Kraft abgeben können, um dann als freie, in unserem Fall gasförmige Molecüle zu erscheinen, so bleibt uns immer noch eine naheliegende Erklärung dieser schwachen Gasentwicklung.

Die Höhe der zur Gasentwicklung erforderlichen electromotorischen Kraft ist bedingt durch den electrischen Zustand der Ionen, sagen wir durch die Stärke der Bindung zwischen dem materiellen Theilchen und der ihm eigenen Electricitätsmenge, ohne mit diesem Ausdruck eine wirkliche Erklärung geben zu wollen.

Wir werden nun annehmen dürfen, dass die Stärke dieser Bindung nicht für alle H- (resp. O-) Ionen unserer Zelle die gleiche ist, dass vielmehr eine unendlich grosse Anzahl verschieden starker Bindungen nebeneinander besteht. Die stärkeren oder schwächeren Bindungen werden um so seltener vorkommen, je weiter sie von dem mittleren Zustand der Bindung entfernt sind; ihre Vertheilung werden wir uns ähnlich derjenigen vorstellen können, wie sie nach der Wahrscheinlichkeit für die Molecularbewegung in Gasen angenommen wird. Demgemäss werden wir erwarten dürfen, dass selbst bei Anwendung der schwächsten electromotorischen Kräfte einzelne Ionen in der Lage sind, ihre Ladung abzugeben und in freiem Zustande aufzutreten. Es wird dann ausser von der Anzahl dieser Ionen von den begleitenden Nebenumständen (Occlusionsfähigkeit der Electroden, Absorptionsfähigkeit der Flüssigkeit, Geschwindigkeit der Convection) abhängen, ob sie der Beobachtung zugänglich werden. In den oben beschriebenen Versuchen waren die Bedingungen für das Sichtbarwerden sehr günstige; übrigens ist an die individuelle Verschiedenheit der einzelnen benutzten Zellen zu erinnern. Nicht undenkbar ist es, dass wir durch Aenderung gewisser Umstände (möglicherweise schon durch Temperaturerhöhung) die „electrische Bindung“ ändern und dann sichtbare Zersetzung auch bei geringen Kräften mit grösserer Leichtigkeit hervorrufen können.<sup>1)</sup>

Phys. Inst. d. Univ. Berlin.

1) Im Anschluss an die Anschauung, dass die electromotorische Kraft zur Zerreissung des Molecüls in seine Atome (Anion und Kation) erforderlich sei, gibt G. Wiedemann (El. II. p. 917) eine völlig analoge Erklärung für die Möglichkeit der Zersetzung auch bei sehr schwachen electromotorischen Kräften. Hier ist es die intramolecular Bewegung, die nicht für alle Molecüle die gleiche und bei einzelnen von besonderer Heftigkeit sein wird, so dass ein Auseinanderreissen bei dem geringsten Anstoss möglich ist.

VIII. *Ueber das Tönen des Telephons und über eine  
Erscheinung des remanenten Magnetismus;  
von S. Kalischer.*

---

Setzt man ein Telephon der Wirkung eines intermittirenden electrischen Stromes aus, so tönt es, auch wenn seine beiden Drahtenden voneinander isolirt sind, das Telephon also *offen* ist. Diese Beobachtung machte ich zuerst im December vorigen Jahres an einem Siemens'schen Telephon, während im Nebenzimmer ein Inductionsapparat aufgestellt war und das Telephon horizontal so gegen das Ohr gehalten wurde, dass seine Axe nahezu senkrecht lag zur Axe der Spiralen des Inductionsapparates. Zugleich hiermit bemerkte ich, dass das Tönen viel schwächer war, oder das Telephon völlig verstummte, wenn die beiden Drahtenden desselben miteinander in Berührung gebracht waren, das Telephon also *geschlossen* war, während, wenn die Axe des Telephons der Axe der Spiralen parallel lag, kein Unterschied in der Intensität des Tönens vorhanden zu sein schien, gleichviel ob das Telephon offen oder geschlossen war. Zuweilen aber blieb das Tönen in ersterer Lage auch bei offenem Telephon aus, und ich bemerkte bald, dass dasselbe zum Tönen oder Schweigen gebracht werden konnte, wenn ich es um *seine eigene Axe* drehte. Hörte man also das Telephon tönen, so genügte oft schon eine ganz geringe Drehung um seine *Axe*, um es zum Schweigen zu bringen.

Die Töne waren begreiflicherweise sehr schwach, und ich vereinfachte nun die Versuchsbedingungen insofern, als ich statt des Inductionsapparates — ob die Inductionsspirale offen oder geschlossen war, hatte sich bei den erwähnten Beobachtungen als unwesentlich ergeben — eine einfache Spirale aus dickem Draht mit einem Eisendrahtbündel als Kern anwandte und, um stärkere Wirkungen zu erzielen, die Erscheinungen in grösserer Nähe der inducirenden Vorrichtung beobachtete. Der Einfachheit halber werde ich, wenn von dieser die Rede ist, im allgemeinen nur die in-

ducirende Spirale nennen, da der Drahtkern keinen anderen Erfolg hat, als die Wirkungen, die den Gegenstand dieser Abhandlung bilden, zu verstärken. Der Strom wurde von zwei Tudor-Accumulatoren geliefert, und als Stromunterbrecher diente ein Wagner'scher Hammer, der ausserhalb des Arbeitszimmers aufgestellt war. Die Erscheinungen waren im wesentlichen die eben beschriebenen, nur quantitativ verschieden. Bei nicht zu grosser Entfernung des Telephons von der inducirenden Spirale trat in keiner Lage desselben völliges Schweigen ein, sondern es zeigten sich sowohl bei offenem wie bei geschlossenem Telephon abwechselnd Minima und Maxima. Dasselbe war nun auch bei paralleler Lage der Telephonaxe zur Axe der inducirenden Spirale der Fall, und bei einer Drehung des Telephons um seine eigene Axe hörte man auch jetzt bisweilen das offene Telephon lauter tönen als das geschlossene.

Bei senkrechter Lage der Axe des Telephons zur Axe der inducirenden Spirale traten die Minima ein, wenn die Magnetschenkel übereinander lagen, die Maxima, wenn sie nebeneinander lagen. Von einer bestimmten Lage ausgehend, findet man also in diesem Falle bei der Drehung des Telephons um seine Axe zwei um  $180^\circ$  voneinander entfernte Minima und zwei Maxima, während jedes Minimum von dem nächsten Maximum um  $90^\circ$  entfernt ist. In den meisten Lagen bei dieser Drehung um  $360^\circ$  waren die Töne<sup>1)</sup> des offenen Telephons, oft sehr erheblich, lauter als die des geschlossenen, oder gleich den letzteren, und nur selten war es umgekehrt.

Da ich die Erscheinungen anfänglich für rein electrischer Natur hielt, so unternahm ich eine grosse Reihe von Versuchen über die Induction in einem kleinen hufeisenförmigen Electromagnet von verschiedener Gestalt und Beschaffenheit in verschiedenen Lagen seiner Axe oder Mittellinie und seiner Schenkel zur Axe der inducirenden Spirale. Ueber

1) Nur der Kürze halber spreche ich von Tönen; was man in Wirklichkeit hört, ist ein continuirliches schnarrendes Geräusch, und zuweilen vernimmt man neben diesem, namentlich bei geschlossenem Telephon, einen musikalischen Ton, der aber meist von dem viel stärkeren Geräusch verdeckt ist.

diese Versuche, die ich noch nicht als völlig abgeschlossen betrachten möchte, behalte ich mir vor, bei einer anderen Gelegenheit zu berichten. Im Folgenden will ich nur versuchen, die am Telephon selbst beobachteten Erscheinungen zu beschreiben und zu erklären, da sie mir an und für sich und vielleicht auch für das Verständniss der Vorgänge im Telephon überhaupt von Interesse zu sein scheinen. Die hier mitgetheilten Beobachtungen sind an drei, theilweise vier Siemens'schen Telephonen gemacht worden.

Um die Beschreibung jedoch nicht zu compliciren, soll hier nur das Verhalten des Telephons besprochen werden für den Fall, dass seine Axe horizontal und rechtwinklig zur Axe der inducirenden Spirale liegt, und diese Lage soll kurz als die *senkrechte* bezeichnet werden. Ich darf mich hier umso mehr damit begnügen, als der allgemeine Charakter der Erscheinungen bei jeder Lage des Telephons derselbe bleibt und nur die einzelnen Phasen derselben sich mit der Lage ändern. Bei einer bestimmten Lage der Axe des Telephons und der inducirenden Spirale zu einander, d. h. wenn die Axen einander parallel sind oder einen gegebenen Winkel miteinander bilden, lässt sich die Grösse der Induction als eine Function der horizontalen und verticalen Entfernung der Axen von einander darstellen. Das Wesen der Erscheinung ändert sich also nicht, ob das Telephon senkrecht und vor der Spirale oder zur Seite derselben, ob seine Axe im gleichen Niveau mit der Axe der inducirenden Spirale oder über oder unter ihr liegt, aber wohl ändern sich die Phasen der Erscheinung, d. h. die Lagen der Maxima und Minima sind andere, je nach der Lage der Axen zu einander. Liegt z. B. das Telephon in einer gewissen Entfernung vor der inducirenden Spirale, sodass die Verlängerung ihrer Axe die Axe des Telephons unter rechtem Winkel trifft, also beide Axen in gleichem Niveau liegen, so findet man die Maxima, wenn die Magnetschenkel nebeneinander, die Minima, wenn sie übereinander liegen. Schiebt man nun das Telephon bei dieser letzteren Lage der Schenkel, ohne sonst etwas zu ändern, vertical in die Höhe, so tönt das Telephon stärker, und man muss es nun, um auf kürzestem Wege zum Minimum zu gelangen, so um seine Axe

drehen, dass der obere Schenkel der inducirenden Spirale zu-gekehrt wird, und der Winkel, um den man das Telephon in dem angegebenen Sinne drehen muss, ist um so grösser, je grösser die verticale Verschiebung war. Schiebt man das Telephon aus jener ersteren Minimumlage vertical unter die Axe der inducirenden Spirale, so tönt es ebenfalls lauter, und um nun auf kürzestem Wege die Minimumlage zu erhalten, muss man es so um seine Axe drehen, dass der obere Schenkel von der inducirenden Spirale fortgedreht wird. Am besten verfolgt man diese Vorgänge, wenn man das Telephon durch hinlänglich lange Drähte mit einem zweiten Telephon verbindet und dieses zum Hören benutzt. Ich will dies der Kürze halber bisweilen das *indirecte* Hören nennen, zum Unterschiede von dem directen durch das der unmittelbaren Wirkung der inducirenden Spirale ausgesetzte Telephon. Die Unterschiede der Intensität, die man in dem zweiten Telephon wahrnimmt, wenn man das erstere um seine Axe dreht, sind so beträchtlich, dass man über die Lage der Maxima und Minima niemals im Zweifel sein kann, ja es bedarf grosser Aufmerksamkeit und Ruhe, um in den Minimumlagen überhaupt etwas zu hören.

Die eben erwähnten Erscheinungen werden sich daraus erklären, dass die Kraftlinien rings um die Axe der inducirenden Spirale bald nach aussen umbiegen; hier sollen diese Mittheilungen nur zur Rechtfertigung dienen, dass ich mich auf die Erörterung des Verhaltens des Telephons bei einer bestimmten Lage beschränke, oder vielmehr, dass die folgenden Mittheilungen genau nur für eine bestimmte, nämlich für die oben als senkrechte bezeichnete Lage gelten, mit der weiteren Einschränkung, dass das Telephon vor der inducirenden Spirale, mit seiner Axe in gleichem Niveau mit der Axe der letzteren oder ein wenig über oder unter ihr liegend gedacht werde, da, wie gesagt, das Wesen der Erscheinung dasselbe bleibt, wenn auch die Lage der Axen zu einander sich ändert.

Dies vorausgeschickt, ist zunächst klar, dass, wenn die Axe des Telephons senkrecht liegt zur Axe der inducirenden Spirale, die Induction in dem Telephon nicht oder nur zum kleinsten Theil eine unmittelbare Wirkung auf die Draht-

spulen desselben sein kann, sondern ganz oder fast ausschliesslich durch den Magnet vermittelt sein muss. Denn denken wir uns eine Spirale, deren Windungen vollkommene Kreise seien und deren Windungsebenen alle senkrecht stehen zu der ihre Mittelpunkte verbindenden Geraden, also ein wahres Solenoid, so würde in einem homogenen magnetischen Felde bei senkrechter Lage der Axe der Spirale zur Axe des Feldes keine Induction stattfinden können, es würde kein Strom in der Spirale inducirt werden, weil die Kraftlinien sämmtlich parallel zu den Windungsebenen laufen. Da jedoch die Windungen der Spirale, die wir die *secundäre* nennen wollen, eine wenn auch geringe Neigung zur Axe haben, so wird die neutrale Lage derselben eine etwas andere, übrigens nur äusserst wenig von der genannten abweichende sein, und in der That ist es ganz leicht, dieselbe in dem magnetischen Felde, wie es hier durch eine Spirale mit Eisendrahtkern geschaffen ward, und das innerhalb gewisser Grenzen als nahezu homogen zu betrachten ist, aufzufinden. Schiebt man nun einen cylindrischen Eisenkern theilweise in die secundäre Spirale ein, so ist das Gleichgewicht gestört, indem die den Eisenkern durchsetzenden Kraftlinien zugleich die Windungsebenen der Spirale schneiden. Ist aber der Eisenkern so weit in die Spirale hineingeschoben, dass die Mitte des ersteren mit der Mitte der letzteren zusammenfällt und beide von der Verlängerung der Axe der inducirenden Spirale halbirt werden, so ist wiederum die Induction Null, weil nun gleich viele Kraftlinien die secundäre Spirale in entgegengesetzter Richtung schneiden. An einem mit der secundären Spirale in dieser Lage durch hinlänglich lange Drähte, um die directe Wirkung der inducirenden Spirale auszuschliessen, verbundenen Telephon hört man absolut nichts.

Anders dagegen bei einem Telephon, wo die Spirale nur auf dem Ende des Magnets sitzt. Bei einem Telephon Bell'scher Construction, das aus einem cylindrischen Magnetstab besteht, auf dessen einem Ende die Drahtspule sitzt, liegt die Sache sehr einfach. Hier kann bei jeder Lage Induction stattfinden, und bei senkrechter Lage seiner Axe zur Axe der inducirenden Spirale wird die electromotorische Kraft



der Induction gleich gross sein, wie man auch das Telephon um seine eigene Axe drehen mag, da der Stab vollkommen symmetrisch ist zu seiner Axe und die ihn treffenden magnetischen Kraftlinien die Drahtspule stets in gleicher Richtung durchsetzen. Verbindet man daher ein solches Telephon in dieser Lage mit einem zweiten Telephon, so tönt dieses bei jeder Drehung des ersteren um seine Axe gleich stark. Verbindet man dagegen ein Siemens'sches Telephon, das bekanntlich aus einem Hufeisenmagnet von rechteckigem Querschnitt besteht, auf dessen rechtwinklig gebogenen Polschuhen die Drahtspulen sitzen, in senkrechter Lage mit einem zweiten Telephon, so nimmt man in diesem bei der Drehung des ersteren um seine Axe sehr bedeutende Intensitätsunterschiede wahr. Liegen die Schenkel desselben übereinander, so tönt das zweite sehr schwach, nur bei grosser Aufmerksamkeit und Ruhe hörbar; beginnt man nun das erstere um seine Axe zu drehen, so tönt das zweite lauter und immer lauter bis zu einem Maximum, das erreicht ist, wenn die Schenkel des ersteren nebeneinander liegen. Bei weiterer Drehung werden die Töne wieder schwächer bis zu einem Minimum, das eintritt, wenn die Magnetschenkel des ersteren Telephons wieder übereinander liegen, und auf der zweiten Hälfte der Drehung wiederholt sich der eben beschriebene Vorgang.

Die Intensität der Töne des Empfangstelephons ist nur ein Ausdruck der Intensität der in dem ersteren Telephon inducirten Wechselströme. Liegen nun die Schenkel seines Hufeisenmagnets nebeneinander, so wird der Kraftlinienstrom, welcher den der inducirenden Spirale zugewandten Schenkel trifft, von seinem Wege abgelenkt und geht durch den Magnet, — und zwar überwiegend in *einer* Richtung, während nur ein verschwindend kleiner Theil der Kraftlinien den Raum zwischen den Schenkeln durchsetzen wird. Wenn dagegen die Schenkel übereinander liegen, so werden beide Schenkel von einem gleichen Kraftlinienstrom getroffen, der den Magnet in entgegengesetzter Richtung durchläuft. Im ersteren Fall wird also die Induction ein Maximum, im letzteren ein Minimum sein und in den Zwischenlagen allmählich ab- oder zunehmen, wie die Versuche ergeben.

Dieselben Vorgänge, welche wir soeben mit Hülfe eines zweiten Telephons verfolgt haben, können wir natürlich auch an dem ersteren, der Wirkung der inducirenden Spirale direct ausgesetzten Telephon wahrnehmen, wenn wir dasselbe dauernd geschlossen halten, während es um seine Axe gedreht wird. Selbst in grösster Nähe des Telephons zur inducirenden Spirale wird man die Maxima und Minima scharf unterscheiden; stellt man das Telephon in 0,5 m oder grösserer Entfernung von ersterer auf, so hört man es in den Maximumlagen noch laut tönen, in den Minimumlagen aber meist gar nicht.

Diese Auseinandersetzung wird uns dazu dienen, auch das Verhalten des der Wirkung der inducirenden Spirale ausgesetzten Telephons, wenn es offen ist, zu verstehen. Wir haben festgestellt, dass der Inductionsstrom in den Drahtspulen des Telephons in der hier vorausgesetzten Lage keine unmittelbare Wirkung der inducirenden Spirale auf sie ist, sondern nur durch Vermittelung der den Magnet durchsetzenden magnetischen Kraftlinien zu Stande kommt, und hieraus das Verhalten bei der Axendrehung erklärt. Im Falle des offenen Telephons können natürlich überhaupt keine Ströme zu Stande kommen, und die Ursache des Tönens ist thatsächlich keine electriche, sondern der Magnet als solcher tönt infolge der ihn durchsetzenden Kraftlinien. Er tönt im wesentlichen aus demselben Grunde, aus welchem das von der inducirenden Spirale umgebene Drahtbündel tönt. Dieses wird durch den intermittirenden Strom abwechselnd magnetisirt und entmagnetisirt, wobei es sich abwechselnd dehnt und verkürzt. Man kann diese Schwingungen fühlen, wenn man das Drahtbündel mit den Fingern berührt. Ebenso wird der Magnet in Schwingungen versetzt infolge der Veränderung, die sein magnetischer Zustand durch die ihn durchsetzenden Kraftlinien erleidet, und die sich in Tönen kundgibt. Der Magnet seinerseits setzt die Eisenmembran in Schwingung — die Rolle, welche diese für sich hierbei spielt, soll alsbald erörtert werden — wodurch die Töne so erheblich verstärkt werden, ja im allgemeinen erst zur Wahrnehmung gelangen.

Dass in der That dies die Ursache des Tönens des offenen Telephons ist, habe ich direct bewiesen, indem ich den Hufeisenmagnet mit seinen Drahtspulen durch einen blossen

Hufeisenmagnet ersetzte, der mit einer ähnlichen Regulirungsvorrichtung versehen war, wie sie beim Telephon gebräuchlich ist. Der Magnet war von Siemens und Halske bezogen und ganz von der Beschaffenheit, wie ihn diese Firma zu Telephonen der hier in Rede stehenden Art verwandt hat. Eine solche Vorrichtung, der Wirkung der inducirenden Spirale ausgesetzt, tönt wie ein Telephon und die Töne haben denselben Charakter.

Wäre die Ursache des Tönens des offenen Telephons eine electriche, so müsste diese Wirkung auch an einem zweiten Telephon, dessen eines Ende mit dem einen Ende der Drahtspulen des ersteren verbunden wäre, während die anderen beiden Enden isolirt blieben, wahrzunehmen sein. Allein dies ist nicht der Fall. Unter diesen Umständen hört man im zweiten Telephon ein schwaches Tönen nur dann, wenn das freie Ende desselben abgeleitet wird. Beiläufig bemerkt, ist es hierbei gleichgültig, ob die Ableitung durch die Gas- oder Wasserleitung oder nur durch den menschlichen Körper, durch festes Anfassen des Drahtendes mit den Fingern erfolgt: die Intensität der Töne bleibt dieselbe.

Was nun oben von der Wirkung der Kraftlinien beim Durchgang durch den Magnet des geschlossenen Telephons gesagt wurde, das gilt auch von dem offenen Telephon bei der hier in Betracht kommenden senkrechten Lage. Liegen die Magnetschenkel übereinander, so wirken die sie durchsetzenden Kraftlinien einander zum grössten Theil entgegen; die Dehnungen und Verkürzungen des Magnets, oder welcher Art sonst die Veränderungen sein mögen, die er unter dem Einfluss der Kraftlinien erleidet, sind ein Minimum und hiermit die Schwingungen und das Tönen, dagegen ein Maximum, wenn die Schenkel nebeneinander liegen.

Es braucht kaum noch hervorgehoben zu werden, dass das Verhalten des offenen Telephons sich in keinem wesentlichen Punkte unterscheidet von einem blossen, mit einer Eisenmembran combinirten Hufeisenmagnet, dass also Alles, was von dem offenen Telephon gesagt wurde, auf den Magnet für sich Anwendung findet.

Diese Reaction des mit einer Eisenmembran combinirten Magnets gegen die magnetischen Kraftlinien ist sehr empfind-

lich. Bei der hier angewandten Stromquelle hört man ein solches System bei gehöriger Regulirung der Stellung des Magnets zur Eisenmembran noch in einer Entfernung von 2 m von der inducirenden Spirale tönen. Ein offenes Bell'sches Telephon, also einen mit einer Eisenmembran combinirten und mit einem Schalltrichter versehenen geraden Magnetstab hört man noch in grösserer Entfernung von der inducirenden Spirale tönen, wenn seine Axe der Axe der letzteren parallel ist oder mit der Verlängerung derselben zusammenfällt. Es ist daher nicht unwahrscheinlich, dass diese Erscheinung zum Nachweis der Hertz'schen Schwingungen dienen könnte, ja es ist wohl denkbar, dass sich auf diese Weise mit Hülfe einer geeigneten Spiegelvorrichtung die Schwingungscurven selbst würden beobachten lassen.

Es ist selbstverständlich, dass diese Reaction des Magnets auch beim geschlossenen Telephon zur Geltung kommen muss, auf welche Art dasselbe auch erregt werden mag, dass also das Tönen desselben, wie auch bereits bemerkt worden ist<sup>1)</sup>, zum Theil auch herrührt von den Schwingungen des Magnets. In bedeutendem Maasse muss dieser Einfluss sich im vorliegenden Falle bei dem dem directen Einfluss der inducirenden Spirale ausgesetzten Telephon geltend machen. Hieraus erklärt es sich, dass, wenn wir die Minimumlagen desselben mit Hülfe eines zweiten Telephons ermittelt haben, und nun bei indirectem Hören (s. oben p. 487) kaum noch einen Laut wahrnehmen, bei directem Hören, namentlich in grosser Nähe der inducirenden Spirale, noch deutliches Tönen wahrnehmbar ist. Dasselbe wird übrigens noch, wie sich später ergeben wird, aus einem anderen Grunde veranlasst.

Ein Eisenstab tönt unter denselben Umständen nicht. Das verhältnissmässig schwache Tönen, das man vernimmt, wenn man den Magnet durch einen Eisenstab ersetzt, hat einen anderen Grund, der gleichfalls später hervortreten wird.

Nachdem die Ursache des Tönens des offenen Telephons im Vorstehenden, wie ich glaube, unzweifelhaft festgestellt ist, bleibt noch die Frage zu erörtern, weshalb dasselbe unter besagten Umständen meist lauter tönt, als wenn es geschlossen

1) G. Wiedemann, Electricität. IV<sup>1</sup>. p. 287.

ist. Für diese so auffällige Erscheinung eine befriedigende Erklärung zu finden, wandte ich die grösste Mühe und Zeit bei dieser Untersuchung auf, ohne sicher zu sein, das Ziel erreicht zu haben. Die Schwierigkeit wird dadurch hervorgerufen, dass die Eisenmembran hier eine ganz uncontrolirbare Rolle spielt. Dies geht schon daraus hervor, dass, während in den bisher beschriebenen Erscheinungen zwischen den von mir untersuchten und somit, wie ich wohl sagen darf, zwischen allen Telephonen gleicher Construction vollkommene Uebereinstimmung herrscht, diese bei dem nun in Rede stehenden Phänomen nicht mehr vorhanden ist. Untersucht man also aufs Gerathewohl mehrere Telephone, so findet man keine Uebereinstimmung in den Lagen, in denen die Telephone offen lauter tönen, als geschlossen oder umgekehrt. Auch ein und dasselbe Telephon zeigt hierin kein symmetrisches Verhalten. Ja, in einem Falle genügte die Umkehrung des Diaphragmas, um die Erscheinungen wesentlich zu modificiren. Zuweilen ist die Entscheidung auch dadurch erschwert, dass im geschlossenen Telephon die Klangfarbe eine andere ist, als im offenen; die Töne sind im ersteren Falle oft gleichsam gebundener, weniger stossartig oder schwirrend. Indessen liess sich doch feststellen, dass die Unterschiede der Intensität des Tönens des offenen und geschlossenen Telephons von der Justirung des Magnets abhängen, derart, dass in der Regel das offene Telephon lauter tönt, als das geschlossene, so lange der Magnet der Platte nicht zu nahe ist, während bei grösserer Nähe beider zu einander und namentlich, wenn der Magnet der Platte bis zur Berührung genähert ist, die Intensitätsunterschiede zwischen den Tönen des offenen und geschlossenen Telephons nahezu oder völlig verschwinden.

Zur Erklärung dieses Verhaltens liesse sich Folgendes beibringen. Das offene Telephon tönt unter dem Einflusse der Kraftlinien, die, von der inducirenden Spirale ausgehend, mit der Herstellung und Unterbrechung des Stromes abwechselnd den Magnet durchsetzen und sich zurückziehen. Der Magnet geräth hierdurch in Schwingungen, das magnetische Feld wird so abwechselnd verstärkt und geschwächt, und die Platte macht die der Stärke des Feldes und den elastischen

Verhältnissen entsprechenden Schwingungen. Ist das Telephon jedoch geschlossen, so entstehen Wechselströme in der Drahtspule, deren Ansteigen und Absinken übrigens durch die Selbstinduction verzögert wird, und die Platte wird daher dauernd in grösserer Nähe des Magnets gehalten, ihre Schwingungen sind weniger frei, ihre Ausbiegungen kleiner und somit die Intensität des Tönens geringer, als wenn das Telephon offen ist. In der Regel findet man, dass das geschlossene Telephon in den Minimumlagen etwas lauter tönt als das offene, was sich daraus erklären würde, dass die Wirkung der Wechselströme überwiegt über die der äusserst geringen, in diesen Lagen unter dem directen Einfluss der von der inducirenden Spirale ausgehenden Kraftlinien noch erfolgenden Schwingungen des Magnets.

Für diese Erklärung spricht der Umstand, dass ein Bell'sches Telephon fast in jeder Lage und bei jeder Justirung des Magnets offen lauter tönt als geschlossen. Die Unregelmässigkeiten und die Asymmetrie, welche in dieser Beziehung das Siemens'sche Telephon zeigt, dürfte in der Gesamtheit der elastischen Verhältnisse, der Art der Einklemmung und der Gestalt der Platte begründet sein. Namentlich ist letztere von wesentlichem Einfluss. Die Platten sind nicht eben und daraus erklärt sich z. B. der oben erwähnte Umstand, dass bei Umkehrung der Platte, ohne sonst etwas zu ändern, die Erscheinungen erheblich modificirt waren, da die Stellung des Magnets zur Platte eine andere geworden war.

Ist der Magnet der Platte sehr nahe oder berührt er sie, so schwingen beide zusammen als ein System und zwischen dem Tönen des offenen und geschlossenen Telephons ist kein Unterschied wahrzunehmen. In diesem Falle ist auch die Klangfarbe eine andere und die Intensität des Tönens absolut geringer, als bei etwas grösserem Abstände des Magnets von der Platte.

Man kann die Grenze, bei deren Ueberschreiten die Unterschiede der Intensität des Tönens des offenen und geschlossenen Telephons verschwinden, in der Regel deutlich erfassen. Dreht man nämlich die Regulirungsschraube nach links, wodurch der Magnet der Platte genähert wird, so weit, dass man einen Knack hört, der die Berührung von Magnet



und Platte anzeigt, so tönt das geschlossene Telephon gerade so, wie das offene. Dreht man nun die Schraube ein wenig nach rechts, so wird man bald wieder einen Knack hören, es ist dies der Moment, in welchem der Magnet die Platte loslässt, und man wird nun Intensitätsunterschiede zwischen dem Tönen des offenen und geschlossenen Telephons wahrnehmen, die immer schärfer hervortreten, je weiter man die Schraube nach rechts dreht, je grösser also innerhalb der gegebenen Grenzen der Abstand des Magnets von der Platte wird.

Dass die Intensitätsunterschiede zwischen dem Tönen des offenen und geschlossenen Telephons lediglich oder fast ausschliesslich von der Eisenmembran herrühren, ergibt sich daraus, dass dieselben verschwinden, wenn man erstere entfernt, soweit bei den alsdann sehr schwach vernehmbaren Tönen eine Entscheidung möglich ist. Dasselbe ist der Fall, wenn man die Eisenplatte durch eine Zink- oder Kupferplatte ersetzt. Die Töne sind in diesen Fällen ziemlich kräftig, aber nahezu gleich stark bei offenem wie bei geschlossenem Telephon, nur in den Maximumlagen ertönt dieses bei Anwendung einer Kupferplatte ein wenig lauter. Auch wenn man zwischen den Magnet und die Eisenplatte eine Scheibe von steifem Papier legt, verschwinden die Intensitätsunterschiede bei geeigneter Justirung des Magnets mehr und mehr.

In dem Charakter der Töne ist es übrigens bedingt, dass die Stellung des Magnets zur Platte auf die scharfe Unterscheidung der Maxima und Minima von einigem Einfluss ist. Mit der Vergrösserung des Abstandes des Magnets von der Platte werden die Töne, wie erwähnt, stärker, aber auch schnarrender, und man muss nun das Telephon resp. den Magnet mit seiner Eisenmembran in etwas grösserer Entfernung von der inducirenden Spirale aufstellen, um die Maxima und Minima gleich scharf zu unterscheiden. Einiges Probiren lehrt bald die geeignetsten Stellungen kennen.

Die Eisenplatte oder vielmehr Weissblechplatte des Telephons — denn aus diesem Material bestehen ja die Membranen der meisten Telephone — spielt aber bei den hier in Rede stehenden Erscheinungen noch eine andere und



wichtigere Rolle. Sie tönt nämlich unter dem Einfluss der von der inducirenden Spirale ausgehenden magnetischen Kraftlinien für sich, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man den Magnet mit seinen Drahtspulen aus der Telephonhülle entfernt. Der Charakter der Töne ist derselbe, wie wenn die Platte mit dem Magnet combinirt ist. Sie tönt am lautesten, wenn sie mit ihrer Ebene den magnetischen Kraftlinien parallel liegt, oder, was dasselbe ist, wenn ihre Axe, d. i. die in ihrem Mittelpunkte errichtete Senkrechte, mit der Verlängerung der Axe der inducirenden Spirale einen rechten Winkel bildet, und zwar ist die günstigste Lage im magnetischen Felde etwa die, in welcher die Axe der inducirenden Spirale resp. deren Verlängerung die Ebene der Platte tangirt. Je kleiner der Winkel ist, welchen die beiden Axen miteinander bilden, desto schwächer sind die Töne, und wenn die Axen einander parallel sind, also die Ebene der Platte senkrecht liegt zu den magnetischen Kraftlinien, so muss man mit der Platte ganz dicht an die inducirende Spirale herangehen, um sie tönen zu hören, während sie in der erstgenannten Lage noch in einer Entfernung von 0,5 m und darüber von der inducirenden Spirale vernehmlich tönt. Merkwürdigerweise *ändert sich aber die Intensität der Töne, wenn man die cylindrische Telephonhülle, zwischen deren trichterförmiger Erweiterung und dem Schalltrichter die Platte eingeklemmt ist, und hiermit zugleich die Platte, die bekanntlich kreisförmig ist, um ihre Axe dreht*, und zwar unterscheidet man im allgemeinen deutlich zwei um  $180^\circ$  von einander entfernte Minima und zwei um  $90^\circ$  von jedem Minimum entfernte Maxima.

Diese an der Telephonmembran beobachtete Erscheinung konnte nicht eine unmittelbare Wirkung der magnetischen Kraftlinien auf die Eisenplatte als solche sein, sondern diese musste polarisirt sein. Wenn dies richtig ist, so mussten bei einer Drehung der Platte für sich um ihre Axe um  $90^\circ$ , ohne die Telephonhülle hierbei zu drehen, die Orte der Minima und Maxima vertauscht erscheinen. Der Versuch bestätigte vollkommen diese Schlussfolgerung. Bei einer weiteren Drehung der Platte für sich um  $90^\circ$  hatten die Minima und Maxima wieder ihren früheren Ort. Eine nähere Untersuchung ergab,

dass die Maxima eintraten, wenn der Durchmesser der Platte, welcher im Telephon der Verbindungslinie der Pole, die wir kurz die *Pollinie* nennen wollen, parallel gewesen war, den magnetischen Kraftlinien parallel lag, und die Minima, wenn dieser Durchmesser senkrecht zu ihnen lag. Die Platte tönt also unter dem Einfluss der inducirenden Spirale infolge ihres *remanenten Magnetismus*.

Nach diesen Erfahrungen, die ich an drei Telephonmembranen gemacht hatte, erwartete ich, dass eine neue Eisenplatte, die noch nicht mit einem Magnet in Berührung gewesen war, unter denselben Umständen nicht tönen würde. Ich untersuchte acht Weissblechplatten, die zum Theil aus verschiedenen Tafeln geschnitten waren und die ganz wie die Telephonmembranen festgeklemmt wurden, aber keine von ihnen liess den geringsten Laut vernehmen, wenn man nicht so dicht an die inducirende Spirale heranging, dass magnetische Anziehungen merklich wurden. Als ich sie jedoch als Telephonmembran anwandte oder wenige Sekunden auf dem Hufeisenmagnet liegen liess und dann abhob, zeigten die Platten die oben an den Telephonplatten beschriebenen Erscheinungen. Sie tönten noch in 0,5 m oder grösserer Entfernung von der inducirenden Spirale und gaben zwei Maxima, wenn der Durchmesser, der der *Pollinie* parallel gewesen war, den magnetischen Kraftlinien parallel lag, und zwei Minima, wenn dieser Durchmesser senkrecht zu ihnen stand. Diese Wahrnehmung, wie die Platte bei der Axendrehung bald lauter bald leiser, ja in gewissen Lagen sehr kräftig tönt, in anderen verstummt, ist ausserordentlich frappant, und man wird unwillkürlich an analoge Erscheinungen der Optik erinnert.

Die Maxima und Minima fallen nicht immer scharf auf einen Punkt, sondern man hört die Platte auf einer grösseren oder kleineren Winkelstrecke, soweit die Schätzung meines Ohres reicht, gleichmässig laut oder leise oder auch gar nicht tönen, aber die Zu- und Abnahme der Intensität überhaupt ist so beträchtlich, dass sie niemals zu verkennen ist. Die mehr oder minder scharfe Begrenzung der Maxima und Minima, sowie deren Lage überhaupt hängt von der Art der Magnetisirung, innerhalb gewisser Grenzen von der Zeit,

während welcher die Platte der magnetisirenden Wirkung ausgesetzt bleibt, und von der etwa vorausgegangenen Magnetisirung ab. Zur Begründung dieser Aussage diene Folgendes.

Eine neue Weissblechplatte, die wenige Secunden auf dem Hufeisenmagnet gelegen hatte, tönte sehr kräftig und hatte ihre Maxima, wenn sie so lag, dass der Durchmesser, welcher der Pollinie parallel gewesen war, den magnetischen Kraftlinien der inducirenden Spirale parallel lag. Zur Orientirung und der Kürze wegen wollen wir den Durchmesser, welcher bei der *ersten* Magnetisirung der Pollinie parallel war, den *bezeichneten* Durchmesser nennen. Als nun nach der ersten Magnetisirung, deren Erfolg soeben mitgetheilt worden war, die Platte für kurze Zeit so auf den Magnet gelegt wurde, dass dieser Durchmesser die Pollinie rechtwinklig kreuzte, tönte sie sehr viel schwächer, und die Maxima und Minima schienen verschoben. Sie schien noch schwächer zu tönen, als sie weitere zwei Minuten in derselben Richtung auf dem Magnet liegen blieb, etwas stärker dagegen, als sie wiederum in derselben Richtung zehn Minuten lang auf dem Magnet liegen gelassen wurde; aber nun traten die Minima ziemlich scharf dann ein, wenn der bezeichnete Durchmesser senkrecht stand zu den magnetischen Kraftlinien. Die Platte war also nun in einer zu der ursprünglichen senkrechten Richtung polarisirt.

Ebenso werden die Erscheinungen modificirt, wenn der bezeichnete Durchmesser einen anderen, zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  liegenden Winkel mit der Pollinie bildet.

Wie es scheint, wird die Platte am schärfsten in Richtung eines Durchmessers polarisirt, fallen also bei der Axendrehung die Maxima und Minima des Tönens um so genauer in die Lagen, bei denen der bezeichnete Durchmesser parallel, bezüglich senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien liegt, je kürzere Zeit die Platte mit dem Magnet in Berührung bleibt. Um die Platte zu polarisiren, ihr also die Fähigkeit zu ertheilen, in den genannten Lagen unter dem Einfluss der magnetischen Kraftlinien zu tönen, ist übrigens eine unmittelbare Berührung mit dem Magnet nicht nöthig; ich erhielt dasselbe Resultat, als die Weissblechplatte durch

eine Scheibe steifen Papiers von dem Magnet getrennt war. Demnach sind auch die Telephonmembranen durch die Nähe des Magnets polarisirt.

In dem Verhalten der Platten erkennen wir einen der Gründe, weshalb das offene Telephon (oder das System von Hufeisenmagnet und Eisenplatte) in den Minimumlagen bei directem Hören noch tönt (s. oben p. 492), während man bei indirectem Hören kaum noch einen Laut vernimmt.

Wir verstehen nun ferner, welchen Grund das Tönen hat, das man vernimmt, wenn der Magnet des Telephons durch einen Weicheisenstab ersetzt und der Wirkung der inducirenden Spirale in der genannten Lage unterworfen wird (oben p. 492), und das ich selbst, ehe ich die vorstehenden Beobachtungen an den Platten machte, dem Eisenstab zuschrieb. Es ist die Telephonmembran, welche tönt, denn wenn man diese durch eine neue Weissblechplatte ersetzt, so vernimmt man unter denselben Umständen nicht den geringsten Laut. Der Eisenstab für sich tönt also nicht. Als er jedoch durch einen electricischen Strom magnetisirt worden war, somit remanenten Magnetismus angenommen hatte und nun mit der neuen Weissblechplatte combinirt wurde, tönte das System. Die Töne sind jedoch ungleich schwächer als die eines Magnetstabes, wie er beispielsweise einen Bestandtheil des Bell'schen Telephons bildet, oder des Hufeisenmagnets eines Siemens'schen Telephons, und man muss den Eisenstab der Platte fast bis zur Berührung nähern, um das Tönen zu hören. Zu diesem Zwecke wurde dieselbe Regulirungsvorrichtung wie für den Hufeisenmagnet angewandt. Die von mir untersuchten Eisenstäbe waren cylindrisch, hatten eine Länge von ca. 13,25 cm und einen Durchmesser von ca. 17 mm.

Merkwürdigerweise zeigen sich aber auch hier bei der Axendrehung Intensitätsunterschiede, was bei einem Magnetstabe durchaus nicht der Fall ist, wie das Verhalten des offenen Bell'schen Telephons lehrt. Ich vermute daher, dass dieselben von der Platte herrühren, indem diese durch den remanenten Magnetismus des Eisenstabes, so gering er auch ist, zugleich unter dem Einfluss der von der inducirenden Spirale ausgehenden magnetischen Kraftlinien vorüber-

gehend polarisirt wird. Ich sage vorübergehend, da die Platte für sich nach Entfernung des Eisenstabes nicht tönt. Zu Gunsten dieser Vermuthung lässt sich anführen, dass die Platte sich auch dadurch polarisiren lässt, dass sie nahe vor die inducirende Spirale mit ihrem Drahtkern, ohne diesen zu berühren, gehalten wird. Aber dann ist sie dauernd polarisirt. Ohne Eisenplatte, oder mit einer Zinkplatte combinirt, hört man den Eisenstab nicht tönen, wie es wohl bei einem Magnet der Fall ist, was jedoch nichts anderes beweist, als dass die Schwingungen des Eisenstabes, wie bereits bemerkt, ungleich geringer sind, als die eines Magnets.

Das Verhalten von Eisenstäben bedarf noch eingehenderer Untersuchung, als mir bisher anzustellen möglich war. Dasselbe gilt von Eisendrähten. Indem ich mir vorbehalte, auf diesen Gegenstand zurückzukommen, sollen hier nur noch einige weitere Beobachtungen über die Platten mitgetheilt werden.

Dieselben, einmal polarisirt, bleiben es, soweit meine Beobachtungen reichen, und soweit das Tönen unter denselben Bedingungen hierfür massgebend ist, dauernd unverändert. Im wesentlichen gleich den Weissblechplatten verhalten sich Eisenplatten, doch tönt eine Eisenplatte unter denselben Umständen schwächer als eine Weissblechplatte von derselben Dicke. Dies scheint nicht in den elastischen Verhältnissen, sondern darin begründet zu sein, dass eine Eisenplatte weniger Magnetismus zurückbehält, als eine Weissblechplatte. Denn wenn man erstere mit dem Hufeisenmagnet combinirt, so tönt das System mindestens so stark wie bei Anwendung einer Weissblechplatte.

Noch in einer anderen Hinsicht zeigt eine Eisenplatte ein etwas anderes Verhalten als eine Platte von Weissblech. Diese behält, wie man aus der Intensität des Tönens schliessen muss, mehr remanenten Magnetismus, wenn sie von dem Magnet längs der Pollinie abgezogen wird, als wenn sie abgerissen wird. Bei einer Eisenplatte ist es gerade umgekehrt. Ja, eine Eisenplatte, die durch Auflegen und Abreissen vom Hufeisenmagnet polarisirt worden ist, lässt sich fast völlig depolarisiren, wenn man sie in derselben Richtung auf den Magnet legt und mit mässiger Geschwindigkeit

abzieht. Durch abermaliges Auflegen und Abreissen kann man sie wiederum bis zur ursprünglichen Stärke polarisiren und diese Proceduren beliebig oft mit demselben Erfolge wiederholen.

An einer solchen, auf die genannten Weisen oder durch Anlegen an das Ende eines in einer Magnetisirungsspirale steckenden Eisenstabes polarisirten Eisen- oder Weissblechplatte haftet kaum das leichteste Eisentheilchen; gegen eine Magnetnadel verhält sie sich wie unmagnetisches Eisen, indem sie beide Hälften derselben in allen ihren Punkten anzieht; die hier mitgetheilte Beobachtung ist daher allem Anscheine nach eine äusserst empfindliche Methode, um unter Umständen die geringsten Spuren von remanentem Magnetismus nachzuweisen.

Wie bereits früher erwähnt, muss man, wenn die Platte mit ihrer Ebene senkrecht liegt zur Axe der inducirenden Spirale, also senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien, ganz nahe an dieselbe herangehen, um erstere tönen zu hören. War die Platte noch nicht mit einem Magnet in Berührung, ist sie also nicht polarisirt, so muss man, um sie tönen zu hören, so dicht an die inducirende Spirale herangehen, dass magnetische Anziehungen merklich werden. Es wollte mir scheinen, als ob auch in diesem Falle bei der Axendrehung Intensitätsunterschiede wahrzunehmen seien. Die Unsicherheit des Urtheils in diesem Falle ist dadurch bedingt, dass bei so grosser Nähe der inducirenden Spirale andere Geräusche, wie die des Drahtkernes, die Resonanz des Tisches, auf dem die Spirale ruht, von denen man sich kaum ganz frei machen kann, störend wirken. Ich muss daher diese Frage, wie manche anderen, die hier angedeutet wurden, und zu denen diese Mittheilungen sonst Anlass geben, noch als eine offene ansehen, hoffe später darauf zurückzukommen und lasse es für jetzt auch dahingestellt, ob beide Erscheinungen, das Tönen der Platte bei senkrechter und bei paralleler Lage ihrer Axe zu den magnetischen Kraftlinien, von derselben Art sind.

Für die Eisenmembran des Telephons ergibt sich aus Vorstehendem, dass sie bei senkrechter Lage desselben unter dem doppelten Einfluss der von der inducirenden Spirale

ausgehenden und sie direct treffenden oder an ihr vorbeigehenden und der Kraftlinien, welche, den Magnet durchsetzend, sie gleichfalls treffen oder an ihr vorbeigehen, zum Tönen kommt. Der Hauptantheil an dem Tönen fällt also unter diesen Umständen der Platte zu; dass aber auch die Schwingungen des Magnets einen directen Beitrag hierzu liefern, geht aus der früheren Mittheilung (p. 495) hervor, dass man den Magnet auch ohne Platte, oder mit einer Zink- oder Kupferplatte combinirt, tönen hört.

Alle in dieser Abhandlung beschriebenen Erscheinungen sind von der Richtung, in welcher der Strom die inducirende Spirale umkreist, völlig unabhängig.

Es ist eine Fundamentalthatsache der Lehre von der Electricität, dass diese nicht auf neutrale Körper wirkt; mit anderen Worten heisst dies, dass die Fundamentalerscheinung der Electricität die Induction ist. Analoges gilt vom Magnetismus. Der Magnet vermag nur dadurch das Eisen anzuziehen, dass er es selbst zu einem Magnet macht. Wir haben hier dasselbe an einer anderen Aeusserung des Magnetismus kennen gelernt.

Das eigenthümliche Verhalten der Platten, sowie manche andere der hier beschriebenen Erscheinungen dürfte sich jedoch nach den hergebrachten Vorstellungen über den Magnetismus schwerlich erklären lassen. Hoffentlich lösen weitere Untersuchungen das Räthsel.

Phys. Inst. der Univ. Berlin, Anf. August 1890.



**IX. Oscillationen eines weissglühenden Platindrahtes durch wiederholte Stromunterbrechungen.**

**Ein Vorlesungsversuch;**

**von Dr. Timoleon Argyropoulos,**

Professor der Physik an der Universität Athen.

Ich hatte einen sehr dünnen und 70 cm langen Platindraht horizontal auf ein passendes Gestell gespannt, um ihn durch einen starken electricischen Strom bis zur Weissgluth zu erhitzen, und bewerkstelligte dies durch Planté's secundäre Batterie sowohl, als auch durch den Strom von mindestens 170 Volt, den die Athener electricische Gesellschaft zur Beleuchtung verwendet. Die bedeutende Ausdehnung, die sofort an dem Draht zu bemerken war, brachte mich auf den Gedanken, dass sich eine lebhaftere Vibrationsbewegung im Draht bilden müsse, sobald der Strom wiederholt unterbrochen würde. Ich schaltete also in den Kreis einen grossen Interruptor mit selbstthätiger Hammerunterbrechung ein, oder benutzte besser den Stromwechsler, welchen Foucault für die Ruhmkorff'schen Inductionsrollen grössten Kalibers anwendet, und sogleich fing der Draht zu vibriren an, indem er sich in eine Reihe stehender Wellen theilte. Man bemerkt dabei überraschend klar 1, 2, 3 bis 8 von unbeweglich erscheinenden Schwingungsknoten getrennte Wellenbogen.

Vermindert man sehr langsam die Spannung des Platindrahtes, so vermehren sich wie auf Commando die Wellenbogen und spannt man denselben straffer, so vermindern sich die Wellenberge und verschmelzen zu einer grossen Transversalschwingung mit den Knoten an den beiden Stützpunkten des Drahtes. Das Gestell, auf welchem ich den Platindraht einklemmte, hatte zwei Bewegungen; eine um den Draht mehr oder minder zu spannen und die andere um ihn länger oder kürzer zu machen.

Man experimentirt am besten in folgender Weise.

Man nimmt vorerst den Draht recht lang und lässt den Strom (auch der von 45—50 Bunsen-Elementen reicht

dazu hin) durchgehen, indem man im Anfang den Hammer des Interruptors andrückt. Nunmehr verkürzt man den Draht, bis er hell weissglühend erscheint und dann erst lässt man die Stromunterbrechung functioniren, wodurch sogleich die Schwingungen sichtbar werden. Man spannt jetzt den Draht straffer, bis er in eine grosse Schwingung geräth, deren Höhepunkt in der Mitte sich befindet. Ich habe so bis 16 sehr deutliche Wellen durch behutsame Abspannung des Drahtes erhalten.

Es ist einleuchtend, dass man auf diese Weise in höchst eleganter Ausführung die Erscheinungen der Seilschwingungen vor einem grossen Auditorium demonstrieren kann.

Athen, Universitätslaboratorium, im Juni 1890.

## **X. *Erwiderung auf die Bemerkungen des Hrn. W. Hallwachs; von A. Righi.***

Indem ich Hrn. W. Hallwachs für die Schlussworte seiner Bemerkungen<sup>1)</sup> verpflichtet bin, worin er anerkennt, was mir an Priorität rücksichtlich der bislang erkannten Gesetze der photoelectrischen Erscheinungen zukommt, gestatte ich mir, noch die folgenden Bemerkungen zu machen.

Wie Hr. W. Hallwachs bestätigt, habe ich zuerst in der Notiz vom 4. März 1888 die Thatsache nachgewiesen, dass ein bestrahlter Leiter eine positive Ladung annimmt. Die richtige Erklärung dieser Thatsache wurde zuerst von ihm am 5. Mai 1888 in einer Mittheilung an die Göttinger Academie und dann von mir in der Notiz vom 1. Juli 1888 in der Acc. dei Lincei gegeben. Damals hatte ich keine Kenntniss von seiner Publication und erst aus dem 8. Heft von Wied. Ann. 1888 und der Julinummer 1888 des Phil. Mag. erfuhr ich, dass er mir zuvorgekommen war. Ich beehrte mich, das Citat seiner Arbeit bei der Correctur des Druckbogens meiner Notiz vom 1. Juli sowie der vollständigen Abhandlung, die am 11. Nov. 1888 der Bologneser Academie vorgetragen wurde, beizufügen. Der Antheil der Priorität, welcher Hrn. Hallwachs zukommt, ist ihm demnach in meinen Publicationen zuerkannt, und ich stehe nicht an, ihm denselben hier nochmals in ausdrücklicher Form zu bestätigen.

Es scheint sonach, dass auf meiner Seite keine „Missverständnisse infolge einer unvollständigen Kenntniss der Bedeutung einiger Worte“ stattgefunden haben — Missverständnisse, in welche übrigens leicht verfallen kann, wer Arbeiten in einer anderen Sprache als der eigenen liest. Als Beispiel will ich gerade ein Missverständniss anführen, von welchem ich nicht weiss, ob es von mir oder von Hrn. Hallwachs herrührt.

1) W. Hallwachs, Wied. Ann. 40. p. 338. 1890.

In seiner Notiz auf p. 343 des 9. Heftes dieser Annalen sagt Hr. Hallwachs, dass ich „die Proportionalität zwischen dem durch Bestrahlung erzeugten Potential und der an der Oberfläche auftretenden electrostatischen Kraft“ bewiesen habe. Dieser Ausspruch scheint mir — es sei denn, dass ich die Bedeutung der Worte missverstehe — nicht richtig. Was ich bewiesen habe, ist gerade die Unabhängigkeit des erreichten Potentials von der electrostatischen Kraft an der Oberfläche.

In der That habe ich gefunden, dass bei einem Leiter von bestimmter Natur (in Luft von bestimmten Bedingungen der Temperatur und des Druckes und beleuchtet von wirklichen Strahlen von gegebener Intensität) die in ihm von den Strahlen erzeugte positive Ladung zu wachsen aufhört, wenn die electriche Dichte an seiner Oberfläche (und folglich auch die electrostatische Kraft) einen bestimmten constanten Werth erreicht hat, während das Potential, auf welches in gleicher Zeit der Leiter gebracht wird, einen beliebigen Werth erreichen kann, je nach der Gestalt, Lage etc. des Leiters.

Ich erlaube mir, das Missverständniss richtig zu stellen, um so mehr, als dasselbe in gleicher Form auch in einer anderen Zeitschrift (Phil. Mag.) wiedergegeben ist.

Bologna, im Juli 1890.

**XI. Brechung und Dispersion des Lichtes in  
einigen Metallen;  
von H. E. J. G. du Bois und H. Rubens.**

(Aus den Sitzungsber. d. K. preuss. Acad. d. Wiss. zu Berlin, vom  
24. Juli 1890; mitgetheilt von den Herren Verfassern.)

§ 1. Einleitung. In zwei grundlegenden Abhandlungen<sup>1)</sup> hat Hr. Kundt eine Methode beschrieben, mittelst äusserst dünner Prismen die Gesetze der Lichtfortpflanzung in den Metallen zu erforschen. An der Hand dieser Methode ist es ihm gelungen, für eine grössere Reihe von Metallen den Brechungsindex für senkrecht durchgehendes Licht, den ungefähren Betrag der Dispersion, sowie den Einfluss der Temperatur auf ersteren zu ermitteln. Um überflüssige Wiederholungen zu vermeiden, werden wir uns im Folgenden häufig mit Hinweisen auf jene überall zugänglichen Arbeiten begnügen.

§ 2. Wir haben nun, unter Beibehaltung der Methode, auch bei schiefer Durchgange des Lichtes Beobachtungen angestellt, um daraus zunächst für einige wenige Metalle eine empirische Brechungsregel abzuleiten. Ferner haben wir es versucht, die Dispersion unter Benutzung von vier spectral wohl definirten Lichtgattungen möglichst genau zu bestimmen. Dabei beschränkten wir uns auf die experimentelle Untersuchung von Eisen, Cobalt und Nickel, und zwar aus folgenden Gründen.

Einmal haben Hr. Lobach<sup>2)</sup> und der Eine von uns<sup>3)</sup>

1) Kundt Berlin. Sitzungsber. Febr. p. 255. 1888 u. Dec. p. 1387. 1888; im Folgenden als (A), resp. (B) citirt. Abgedruckt in Wied. Ann. 34. p. 469. 1888 u. 36. p. 824. 1889. Uebersetzt in Phil. Mag. (5) 26. p. 1. 1888.

2) Lobach, Inauguraldiss., Berlin 1890. Wied. Ann. 39. p. 358. 1890.

3) du Bois, Wied. Ann. 39. p. 38. 1890. Phil. Mag. (5) 29. p. 264. 1890.

Werthe für die Dispersion des Kundt'schen, resp. Kerr'schen magnetooptischen Phänomens in eben diesen drei Substanzen geliefert; diese Zahlen beziehen sich auf dieselben, nun auch von uns angewandten Lichtgattungen. Wir hoffen auf diese Weise zur experimentellen Beschaffung streng vergleichbarer metalloptischer Constanten etwas beizutragen.

Sodann gehören die genannten Metalle zu denen, deren electrolytische Darstellung in keilförmigen Schichten bei hinreichender Uebung ohne allzu grosse Schwierigkeiten gelingt. Wir glauben deshalb mit einiger Sicherheit annehmen zu dürfen, dass unsere Präparate an Güte wenig zu wünschen übrig liessen.

Endlich trägt die erhebliche Brechung zur Genauigkeit der Messungen sehr bei. Wir werden übrigens gelegentlich das Verhalten einiger Edelmetalle mit weit geringerem Brechungsindex zu discutiren haben; doch haben wir hierzu keine Versuche angestellt (cf. § 16).

§ 3. Die Versuchsanordnung sowie das Spectrometer waren wesentlich die von Hrn. Kundt bei seinen Versuchen in Berlin benutzten und von ihm beschriebenen.<sup>1)</sup> Die Heizvorrichtung wurde von uns nicht angewandt, dafür aber einige specielle Vorkehrungen getroffen, welche an geeigneter Stelle angegeben werden sollen. Zur Ablesung wurde weder, wie früher, der Theilkreis des Spectrometers benutzt, noch ein Ocular mit Fadenmikrometer. Die Einstellungen wurden statt dessen in allen Fällen durch Drehen an der Alhidadenschraube des (zehnfach vergrößernden) Spectrometerfernrohres bewirkt; dadurch wurde bei der Messung der Prismenwinkel das reflectirte Bild des Fadenkreuzes, bei Beobachtung der Ablenkungen das Spaltbild zwischen die Parallelfäden im Ocular eingestellt. Während der eine Beobachter dies ausführte, wurde die Ablesung an der Trommeltheilung der Alhidadenschraube vom anderen mittelst eines Hilfsfernrohres vorgenommen; es entsprach ein Trommeltheil einer Drehung der Fernrohraxe um  $4,20''$ .

Prismenwinkel und Ablenkungen sind im Folgenden stets

---

1) Kundt, l. c. (B) p. 1389.

in Bogensekunden angegeben, wie sie aus 20 Einstellungen erhalten wurden. Im allgemeinen wurde vor jedem solchen Satze die Güte der Collimirung geprüft, und zwar durch Beobachtungen an den seitlichen unbelegten Fenstern, in der von Hrn. Kundt<sup>1)</sup> vorgeschriebenen Weise.

§ 4. Controlversuche sind von Hrn. Kundt in erheblicher Anzahl angestellt worden.<sup>2)</sup> Wir haben daher nur zur Prüfung des Collimirverfahrens noch einige Messungen ausgeführt. Eine sehr vollkommene, planparallele Platte von Steinheil wurde derart mit schwarzem Lack überzogen, dass nur vier 0,2 cm breite und 1,0 cm hohe Fenster offen blieben, die ihrer gegenseitigen Lage nach ebenso gruppiert waren, wie die Fenster und Prismenöffnungen unserer Metallpräparate (siehe Fig. 1). Nach der wie üblich ausgeführten Collimirung an den beiden äusseren Fenstern ergaben die beiden inneren nunmehr einen scheinbaren Winkel von  $0,2''$ , eine scheinbare Ablenkung von  $0,4''$ . Eine ganz ähnlich behandelte platinirte Glasplatte gab anstatt dessen die Werthe  $1,3''$  und  $1,8''$ ; dieselbe war als „mittelmässig“ bezeichnet und weniger eben als irgend eine derjenigen, welche unsere Versuchsprismen trugen. Dass letztere Platten mit grosser Sorgfalt ausgesucht und mittelst eines Gauss'schen Oculars geprüft wurden, bedarf kaum der Erwähnung.

Da die Winkel der untersuchten Prismen zwischen  $15''$  und  $25''$  lagen<sup>3)</sup>, die Ablenkung aber in weitaus den meisten Fällen über  $20''$  (bis zu  $200''$ , vgl. § 11) betrug, so war nach den oben angeführten Zahlen die Collimirungsmethode für unsere Zwecke genügend. Was die Bestimmung der Prismenwinkel und Ablenkungen betrifft, so bemerken wir noch, dass diese nicht merklich durch wiederholte innere Reflexion getrübt sein kann. Waren doch die Prismen stets so dick,

1) Kundt, l. c. (B) p. 1390.

2) Kundt, l. c. (A) p. 263–265.

3) Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Benutzung von Prismen mit erheblich grösserem Winkel ausgeschlossen ist, wenn man die dünnste Stelle  $> 3 \cdot 10^{-6}$  cm, die dickste  $< 13 \cdot 10^{-6}$  cm halten will; die mittlere Prismenbreite kann dabei auf 0,15 cm geschätzt werden.



dass eine doppelt starke Schicht fast völlig undurchsichtig gewesen wäre.<sup>1)</sup>

§ 5. Eine allgemeine Schätzung der erreichten Genauigkeit ist undurchführbar; denn es hat ein jedes Prisma seine besondere Individualität, welche darauf den grössten Einfluss übt. Wir haben daher ausser den endgültigen Werthen (Tab. 2 und 4) auch detaillirtes Beobachtungsmaterial mitgetheilt (Tab. 1 und 3), welches für die Beurtheilung unserer Messungen einen Anhaltspunkt bieten soll.

Unsere Prismen wurden stets in Exsiccatoren verwahrt. Bei dieser Behandlung lässt ihre Haltbarkeit nichts zu wünschen übrig. Beispielsweise fanden wir Prismenwinkel und Ablenkung eines Cobaltprismas (CoIII), welches sechs Monate unberührt gelegen hatte, innerhalb der Fehlergrenzen unverändert. Dasselbe war nach vier Monaten der Fall bei einem Eisenprisma (FeIII), dessen Lackblending überdies entfernt und durch eine neue ersetzt worden war: nebenbei ein Beweis für die Ebenheit der Flächen, da bei der neuen Blending sicherlich nicht genau dieselben Flächenstücke blosslagen, wie bei der alten.

Noch sei erwähnt, dass gelegentlich an unseren Prismen auf einem Spectrometer von Schmidt und Hänsch von Hrn. Shea im hiesigen Institute gewisse andere Versuche angestellt wurden; dieselben ergaben dann immer eine sehr befriedigende Bestätigung unserer Resultate.

#### I. Die Brechung.

§ 6. Messungen der Ablenkung bei schiefem Durchgange des Lichtes durch die Prismen würden an sich wenig Interesse geboten haben. Es lag uns daher zunächst ob, aus dem Gange dieser Messungen in unbefangener Weise zu der Beziehung zu gelangen, welche zwischen den Neigungen der Wellenfront im Metall, resp. in der Luft zur Grenzebene beider Medien stattfinden muss. Dabei sollte jegliche Nebenhypothese vermieden und auch eine Stütze an einer der

1) Vgl. Wernicke, Pogg. Ann. 155. p. 88. 1875, auch Rathenau, Inauguraldiss. Berlin 1889.

gegenwärtig bestehenden optischen Theorien nicht gesucht werden. Inwiefern wir auf dem so vorgeschriebenen Wege zum Ziele gelangt sind, wird die folgende Behandlung des gestellten Problems zeigen müssen.

§ 7. Bezeichnungen. Zunächst sei bemerkt, dass immer mit genau „parallelem“ Lichte beobachtet wurde, wir es mithin stets mit ebener Wellenfront zu thun haben, deren Normale wir in Bezug auf ihre Richtung in's Auge zu fassen haben. Die Winkel dieser Richtungen mit den Normalen auf den die Luftseite begrenzenden Prismenflächen seien im Metalle mit  $i_m$ , in Luft mit  $i$  bezeichnet. Es sind dies auch die Neigungen der Wellenfronten zu beiden Seiten der Grenzebene Metall Luft. Für den Brechungsindex wählen wir das übliche Symbol  $n$ ; derselbe hat einen streng physikalischen Sinn nur dann, wenn das Snellius'sche Sinusgesetz genau oder mit unendlicher Annäherung gilt (vgl. § 12).

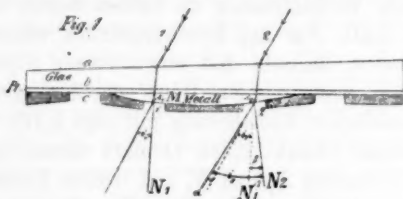
Den mittelst Gauss'schen Oculars direct gemessenen Winkel der Normalen  $N_1$  und  $N_2$  auf beiden Prismenflächen nennen wir in Anlehnung an Hrn. Kundt den „Prismenwinkel“  $\beta$ ; derselbe ist die Summe der Winkel beider Prismen. Der Winkel zwischen zwei durch je ein Prisma gegangenen, ursprünglich parallelen Lichtbündeln ist die Ablenkung  $\alpha$ . Sowohl  $\alpha$  als  $\beta$  können für unseren vorliegenden Zweck als unendlich klein betrachtet werden, eine die mathematische Behandlung sehr vereinfachende Eigenschaft.

§ 8. Rechenverfahren. In Fig. 1 ist ein Horizontalschnitt unserer Präparate schematisch dargestellt. Die Prismenflächen sind 1 und 2 numerirt und diese Zahlen den betreffenden Grössen als Indices angehängt. Betrachten wir nun zwei, einander parallele, unendlich dünne Lichtbündel 1 und 2, so ist klar, dass dieselben bis in das Metall  $M$  hinein einander parallel bleiben werden; und zwar etwa bis zu den Punkten  $A_1$  und  $A_2$ , welche den Flächen 1 und 2 unendlich nahe liegen. Es bleibt dies offenbar auch dann der Fall, wenn die Glasplatte (resp. auch die Platin-schicht) keilförmig ist. Auch die Vorgänge an den Grenzflächen  $a, b, c$  können den Parallelismus beider Bündel in keiner Weise beeinträchtigen. Vielmehr geht dieser erst

durch die Brechung an der vierten Grenze Metall Luft verloren. Daher ist es dieser letzte Grenzvorgang und kein anderer, den wir durch unsere Versuche näher kennen lernen können. Durch ihn muss  $i$  eindeutig bestimmt sein, wenn  $i_m$  gegeben ist. Für unseren Zweck empfiehlt es sich jedoch eher  $i$  als unabhängige Variable zu betrachten, da letzterer Winkel der direct gemessene ist.

Wir setzen daher  $i_m = f(i)$ , eine zwar vorläufig unbekannte, aber offenbar einwerthige ungerade Function. Aus der Betrachtung der Fig. 1 folgt jetzt sofort:

$$\angle N_1' A_2 N_2 = i_m - i_{m_1} = di_m = \beta \quad \text{und} \quad i_2 - i_1 = di = \alpha + \beta.$$



Daher:

$$\frac{di_m}{di} = f'(i) = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

und:

$$(1) \quad f(i) = \int_0^i \frac{\beta di}{\alpha + \beta}.$$

§ 9. Aus unseren Messungen kennen wir die Werthe von  $\alpha$ , daher auch von  $\beta/(\alpha + \beta)$  für eine Reihe von Werthen von  $i$ . Wir erhalten somit in gewissem Sinne eine experimentelle Differentialgleichung einfachster Art, die wir nur zu integrieren brauchen, um zu der gewünschten Beziehung zwischen  $i_m$  und  $i$  zu gelangen. Das haben wir in der That ausgeführt: Zu den Abscissen  $i$  wurden Werthe von  $\beta/(\alpha + \beta)$  als Ordinaten aufgetragen, durch diese Punkte eine glatte Curve gezogen, und durch graphische Quadratur die Werthe des Integrals  $f(i)$  ermittelt; davon ausgehend, dass  $f(0) = 0$  ist, was aus Gründen der Symmetrie zutreffen muss.

§ 10. Falls die Prismen aus gewöhnlicher, durchsichtiger Substanz vom Index  $n$  gebildet wären, so gälte das Snellius'sche Gesetz; es wäre:

$$(2) \quad i_m = f(i) = \arcsin \left( \frac{\sin i}{n} \right).$$

Dies gäbe durch Differentiation die expliciten Gleichungen:

$$(3) \quad n = \sqrt{\left( \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) \cos i \right)^2 + \sin^2 i} \quad \text{und:}$$

$$(4) \quad \alpha = \beta \left\{ \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - 1 \right\},$$

welche im Folgenden wiederholt zur Rechnung benutzt werden, je nachdem ausser  $i$  und  $\beta$  entweder  $\alpha$  oder  $n$  als bekannt angenommen werden. Die Discussion der Gl. (4) ergibt noch, dass beim Minimum der Ablenkung (für  $i=0$ ):

$$(5) \quad \alpha = \beta(n - 1) \\ \left[ \text{oder } n = \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right]$$

wird und sich daher in dessen Nähe wenig ändert.<sup>1)</sup> Wenn  $i$  sich dem Werthe  $90^\circ$  nähert, strebt  $\alpha$  dem Werthe  $\infty$  zu, wenigstens so lange  $n > 1$  ist, also keine Totalreflexion eintritt (vgl. § 15).

§ 11. Die Versuche wurden damit begonnen, dass das Präparat vertical auf dem Spectrometertischchen befestigt wurde. Mittelst der vorhandenen Kreistheilung konnte der Prismennormale jede beliebige Neigung links (+) oder rechts (-) von der Fernrohraxe ertheilt werden. Nach einigen orientirenden Vorversuchen haben wir regelmässige Messungen angestellt bei  $i = 0^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 55^\circ, 60^\circ, 65^\circ$ , weil in diesen Intervallen die Zunahmen der Ablenkung einigermaassen gleichmässig erfolgten. In einigen Fällen konnten wir noch bei  $70^\circ$  Neigung beobachten; die Ablenkungen sind dann schon sehr beträchtlich; so erhielten wir mit einem Cobaltprisma nahezu  $200''$ , also über drei Minuten. Jedoch wird dann die Projection der Prismenfläche auf das Fernrohr-objectiv zu schmal und daher das Spaltbild sehr durch Beugung verwaschen, sodass Messungen schwierig und trotz der erheblichen Ablenkung ungenau werden.

1) Vgl. Kundt, l. c. (A) p. 259.

Tabelle 1.  
(Prisma Fe III.)

$\beta$	Ablenkung $\alpha$ bei der Neigung $i$ :						
	0°	± 30°	± 40°	± 50°	± 55°	± 60°	± 65°
du Bois							
26,1"	51,4"	63,7"	74,7"	91,6"	105,3"	122,5"	147,0"
25,0	50,7	67,5	72,2	107,2	105,7	122,8	159,5
25,5	50,4	—	—	—	—	—	—
—	52,0	—	—	—	—	—	—
25,7	51,1	65,6	73,5	99,4	105,5	122,7	153,3
Rubens							
27,8"	51,5"	65,5"	74,9"	88,5"	114,4"	119,5"	155,5"
23,4	51,2	70,2	71,4	106,8	103,7	137,9	153,5
26,4	53,1	—	—	—	—	—	—
—	53,8	—	—	—	—	—	—
25,9	52,4	67,9	73,2	97,7	109,1	128,7	154,5
Mittelwerthe							
25,8"	51,7"	66,7"	73,3"	98,5"	107,3"	125,7"	153,9"

Die Lichtquelle zu diesen Beobachtungen war ein Linne-mann'scher Zirkonbrenner mit vorgesetztem rothen Glase. Beispielshalber geben wir in Tab. 1 eine vollständige Beobachtungsreihe wieder. Wie ersichtlich, bestimmte jeder Beobachter (aus 20 Ablesungen) eine Ablenkung bei positiver und eine bei negativer Neigung, welche im Grossen und Ganzen wesentlich dieselben Werthe ergeben. Der Winkel  $\beta$  wurde von jedem von uns dreimal, die Ablenkung bei senkrechtem Durchgang viermal gemessen, wegen des vorwiegenden Einflusses dieser Werthe auf die Endresultate. Die Mittelwerthe beider Beobachter sind für die nachfolgende Rechnung verworhet.

Tabelle 2.  
(„Rothes“ Licht.)

$i$	0°	30°	40°	50°	55°	60°	65°
Prisma Fe III; $\beta = 25,7''$ ; $n = 3,06$ .							
$\alpha$ , beob.	51,7"	66,7"	73,3"	98,5"	107,3"	125,7"	153,9"
$\alpha$ (Snellius)	53,0	64,0	74,7	92,8	106,4	125,3	152,0
$n$ , ber.	3,01	3,15	3,02	3,20	3,08	3,07	3,09
$i_m$ , integr.	0°	9,3°	12,0°	14,4°	15,4°	16,3°	17,1°
$i_m$ (Snellius)	0	9,4	12,1	14,5	15,5	16,4	17,2
Diff.	—	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1	-0,1

(Fortsetzung von Tabelle 2.)

$i$	0°	30°	40°	50°	55°	60°	65°
Prisma Co III; $\beta = 23,6''$ ; $n = 3,10$ .							
$\alpha$ , beob.	47,0''	61,2''	72,2''	95,1''	113,0''	124,0''	152,4''
$\alpha$ (Snellius)	49,7	59,9	70,0	86,9	99,6	117,2	142,6
$n$ , ber.	3,00	3,15	3,17	3,32	3,42	3,24	3,28
$i_m$ , integr.	0°	9,2°	11,8°	14,0°	14,9°	15,7°	16,4°
$i_m$ (Snellius)	0	9,3	11,9	14,3	15,3	16,2	17,0
Diff.	—	—0,1	—0,1	—0,3	—0,4	—0,5	—0,6
Prisma Ni III; $\beta = 27,7''$ ; $n = 1,93$ .							
$\alpha$ , beob.	27,3''	31,3''	36,8''	51,0''	61,2''	84,4''	114,4''
$\alpha$ (Snellius)	25,8	31,9	38,2	48,6	56,7	67,9	83,9
$n$ , ber.	1,98	1,91	1,90	1,98	2,02	2,20	2,35
$i_m$ , integr.	0°	14,7°	19,2°	23,1°	24,8°	26,2°	27,3°
$i_m$ (Snellius)	0	15,0	19,5	23,4	25,1	26,6	28,0
Diff.	—	—0,3	—0,3	—0,3	—0,3	—0,4	—0,7

Wir haben uns hier für jedes Metall mit der Untersuchung eines einzigen Prismas begnügt, während wir zu den Dispersionsmessungen je drei Prismen benutzten. Ebensovienig wie bei letzteren eine Abhängigkeit vom Prismenwinkel hervortritt (§ 18), dürfte dies bei schiefem Durchgang der Fall sein; und zudem war es uns hier weniger als dort darum zu thun, durch Häufung der langwierigen Beobachtungen möglichst genaue Constanten zu erhalten.<sup>1)</sup>

§ 12. Die Resultate sind für alle drei Metalle in Tab. 2 niedergelegt. Aus den beobachteten  $\alpha$  (erste Horizontalzeile eines jeden Tabellenabschnittes) sind zuerst nach Gl. (3) Werthe für  $n$  berechnet (Zeile 3); und zwar geschah dies nur, um zu entscheiden, ob etwa das Gesetz von Snellius Geltung habe. Für Nickel nehmen die  $n$  bei wachsendem  $i$  zuletzt unzweifelhaft zu; dasselbe tritt bei Cobalt ebenfalls hervor, wenn auch weit weniger ausgeprägt. Bei Eisen liegen die beobachteten Abweichungen vom Snellius'schen Gesetze sämtlich innerhalb der Fehlergrenze. Indessen ist wohl anzunehmen, dass letzteres Metall sich in dieser Hinsicht nur quantitativ, nicht qualitativ von den beiden verwandten Substanzen unterscheidet.

1) Vgl. übrigens die im letzten Absatze des § 5 erwähnte, hier geübte Controle durch einen unabhängigen Beobachter.

Zugleich mit der Constanz verliert nun aber  $n$  auch seinen physikalischen Sinn; auch haben wir die variablen Werthe nur deshalb angeführt, um ihre weitere Ausserachtlassung zu motiviren. Die nunmehr nachgewiesene Abweichung der Metalle vom Sinusgesetz beginnt erst bei Neigungen über  $40^\circ$  schärfer hervorzutreten. Wir glauben den Gang dieser Abweichung klarer darstellen zu können, wenn wir das Verhalten eines jeden Metalles mit demjenigen einer, zu diesem Zwecke eingeführten, idealen durchsichtigen Substanz vergleichen. Und zwar soll letztere durch den Brechungsindex charakterisirt sein, welchen man als Mittel aus den bei  $0^\circ$ ,  $30^\circ$  und  $40^\circ$  Neigung für das Metall gefundenen, innerhalb der Fehlergrenze gleichen,  $n$  erhält.

Wir haben nun für diese fictiven Substanzen  $\alpha$  und  $i_m$  nach den Gleichungen (4) und (2), d. h. also nach dem Snel-lius'schen Gesetze berechnet (Horizontalzeile 2 und 5). Endlich sind die durch die graphische Integration gewonnenen Werthe von  $i_m$  für das Metall in Zeile 4 verzeichnet.

Der besseren Uebersicht wegen haben wir den Inhalt der Tabelle 2 auch graphisch dargestellt. In Figur 2 sind die  $\alpha$  als Function von  $i$  aufgetragen; und zwar beziehen sich die gestrichelten Curven auf die idealen Substanzen, die gebrochenen Geraden auf die Metalle.<sup>1)</sup> Bei Eisen tritt eine Abweichung beider Linien kaum hervor, bei Cobalt und besonders bei Nickel dagegen sehr deutlich.

Ebenso gibt Fig. 3 die Beziehung zwischen  $i_m$  (Ordinate) und  $i$  (Abscisse); die gestrichelten Curven betreffen wieder die ideale Substanz. Die Punkte  $\odot$ , welche sich auf die Metalle beziehen, liegen alle etwas mehr nach der Seite der Abscissenaxe, was nur in der kleinen Zeichnung nicht sehr deutlich hervortritt.

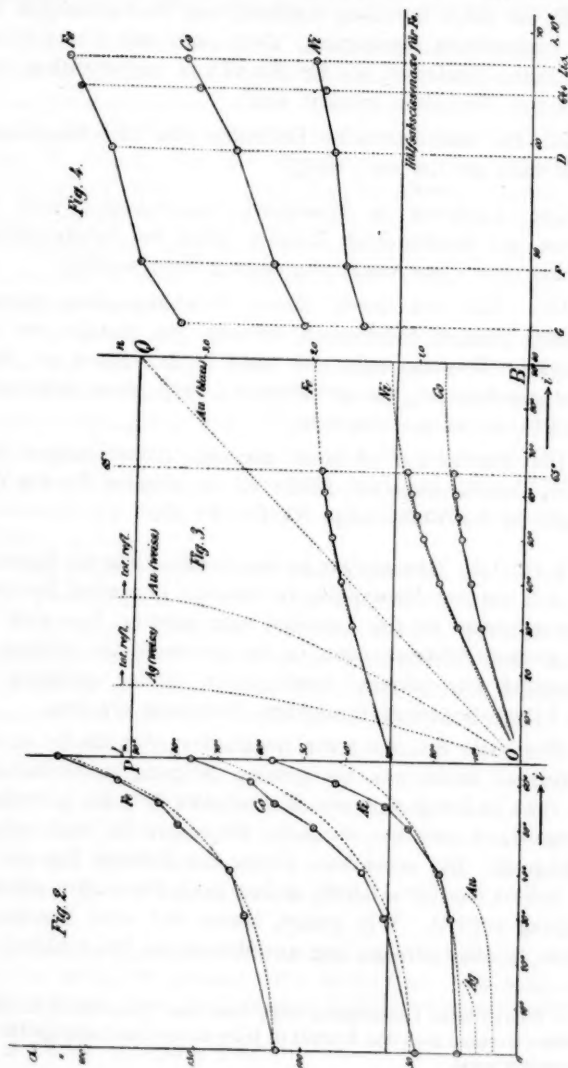
§ 13. Zusammenfassung. Folgendes glauben wir nun als festgestellt hervorheben zu können.

---

1) Wegen des nahe gleichen Verhaltens von Co und Fe, mussten in sämtlichen Fig. 2—4 die Ordinaten der Eisencurven von der höher gelegenen Hilfsabscissenaxe ab gezählt werden, um einer Verwirrung mit den Cobaltcurven vorzubeugen.



I. Bei dem Austritt aus Fe, Co und Ni (und voraussichtlich einer Reihe anderer Metalle) in Luft folgt das Licht



bei geringen Austrittswinkeln zunächst fast genau dem Snel-lius'schen Sinusgesetz.<sup>1)</sup>

Es ist daher durchaus statthaft, aus Beobachtungen bei nahe senkrechtem Durchgang, aber auch nur aus solchen, einen Index abzuleiten, wie Hr. Kundt es zuerst gethan hat. Auf dieses Verhalten gründet sich:

II. die mathematische Definition des Brechungsindex der Metalle als  $\lim_{i=0} (\sin i / \sin i_m)$ .

Der Ausdruck in Klammern unterscheidet sich für die von uns untersuchten Metalle selbst bei beträchtlichen Werthen von  $i$  nur wenig von seinem Grenzwerthe.

III. Von den durch diesen Brechungsindex charakterisirten idealen Substanzen weichen die Metalle bei zunehmender Neigung mehr und mehr in dem Sinne ab, dass einem gegebenen  $i_m$  ein grösseres  $i$ , resp. einem gegebenen  $i$  ein kleineres  $i_m$  entspricht.

Die Werthe der übrigens geringen Abweichungen gibt unsere Tabelle empirisch (Zeile 6); sie nehmen für die drei Metalle in der Reihenfolge Ni, Co, Fe ab.

§ 14. Die Beobachtungsmethode. Für die Genauigkeit des unseren Messungen zu Grunde liegenden Beobachtungsverfahrens ist der Umstand sehr günstig, dass sich aus den starken Abweichungen in der beobachteten Ablenkung schliesslich nur geringe Aenderungen in der endgültig auf dem Integrationswege erreichten Beziehung ergeben.

Für viele Zwecke mehr qualitativer Art dürfte es sich empfehlen, weiter nur bei grosser Neigung zu beobachten; und zwar ist der geeignetste Winkel etwa  $60^\circ$ ; die Ablenkung beträgt dann etwa das dreifache derjenigen bei senkrechtem Durchgang. Die scheinbare Breite der Prismen dagegen ist nur halbt (cos  $60^\circ = 0,500$ ), sodass noch keine allzu störende Beugung auftritt. Wie gesagt, lassen sich aber Brechungsindices in aller Strenge nur aus Messungen bei senkrechtem

1) Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass dann dieses Gesetz innerhalb derselben Grenzen auch den Austritt in jedes andere durchsichtige Medium beherrschen muss.

Durchgang berechnen; diese Beobachtungsmethode haben wir denn auch für unsere Messungen der Dispersion beibehalten.

§ 15. Andere Metalle. Diese Bemerkungen gelten nur für solche Metalle, welche, wie die untersuchten, einen relativ hohen Brechungsindex haben. Denn ein wesentliches Erforderniss für die Gültigkeit des oben ausgeführten scheint uns darin zu liegen, dass die Werthe von  $i_m$  kaum  $30^\circ$  überschreiten, ein Winkel, dessen Cosinus von der Einheit noch wenig abweicht.<sup>1)</sup> Bei Fe und Co bleibt  $i_m$  sogar unter  $20^\circ$ ; dementsprechend sind auch die Abweichungen vom Snellius'schen Gesetze am grössten bei Nickel, welches den geringsten Index hat.

Wir haben nun auch in Fig. 3 theoretische Curven für Silber und Gold gezeichnet; zunächst unter der Annahme, dass für diese das Sinusgesetz durchweg gilt; und zwar unter Zugrundelegung der Brechungsindices, welche Hr. Kundt<sup>2)</sup> angibt: Ag (weiss) 0,27; Au (weiss) 0,58; Au (blau) 1,00. Zu letzterem Werthe ist zu bemerken, dass ein solches Material überhaupt nie eine Ablenkung gibt, folglich immer  $i_m = i$  bleibt.

Aus jenen theoretischen, das Verhalten von Silber und Gold darstellenden Curven folgt, dass bei  $i > 15,66^\circ$ , resp.  $i > 35,45^\circ$  totale Reflexion eintreten müsste; grössere Austrittswinkel in Luft wären daher unmöglich. Die Ablenkungscurven der Fig. 2 sind für Prismen vom Winkel  $25''$  berechnet; sie sollten eigentlich unter der Abscissenaxe liegen, da die Ablenkungen alle negativ werden. Die Curven zeigen, dass auch bei diesen Metallen die numerischen Werthe von  $\alpha$  mit  $i$  zunehmen müssten, um schliesslich bei den oben angegebenen kritischen Werthen der Abscisse genau den Werth des Prismenwinkels  $\beta$  zu erreichen [vgl. Gl. (4) § 10] und dort ihren Endpunkt zu finden.

1) Wie aus Fig. 3 ersichtlich, wächst  $i_m$  nur unbedeutend, wenn  $i$  noch von  $65^\circ$  bis  $90^\circ$  zunimmt. Wir hätten daher auch kaum etwas Neues erfahren, wenn bei Neigungen über  $65^\circ$  hinaus untersucht worden wäre.

2) Kundt, l. c. (A) p. 266.

§ 16. Nun lehrt aber die oberflächlichste Betrachtung, dass man durch Silber- oder Goldschichten unter jeder Neigung hindurchsehen kann. Es folgt, dass die oben behufs der Discussion gemachte Annahme des Snellius'schen Gesetzes in diesem Falle durchaus unzulässig ist, selbst als rohe Annäherung.

Eine weitere Verfolgung dieser Versuche erschien aus verschiedenen Gründen zunächst unrathsam. Es liess sich ja vorhersehen, dass die überaus günstigen Bedingungen, welche unserer Methode bei der Untersuchung von Fe, Co und Ni erwachsen, hier in das gerade Gegentheil übergehen müssen. Würde es sich doch nunmehr darum handeln, aus schwachen Aenderungen der ohnedies geringen Ablenkungen die grossen Abweichungen vom Sinusgesetz, welche ja zweifellos bestehen müssen, zu bestimmen. Ohne Verfeinerung der Beobachtungen hätten dahin gerichtete Versuche wenig Aussicht auf Erfolg geboten.

Indessen lässt sich der Verlauf der beiden Silber- und Goldcurven (Fig. 3) vorhersagen. Zunächst tangiren sie die gezeichneten Curven im Anfangspunkte, biegen sich aber immer mehr concav der Abscissenaxe zu und schneiden unter keinen Umständen die Gerade  $PQ$ , da dies totale Reflexion bedeuten würde; endlich müssen sie senkrecht zu  $QR$  auftreffen. Ihr Charakter ist also wesentlich derselbe als der unserer für Ni u. s. w. gefundenen Curven.

## II. Die Dispersion.

§ 17. Diese Versuche mussten, wie bereits bemerkt, beim Minimum der Ablenkung ausgeführt werden. In der Spaltebene des Spectrometers wurde ein kleines lichtstarkes Spectrum einer Bogenlampe entworfen. Durch geringe Drehung des Collimatorrohres konnte der Spalt auf beliebig vorgeschriebene Spectralgebiete eingestellt werden. Zu diesem Zwecke war der Spectrometerkreis durch Beobachtung der Spectrallinien von Li, Na und H so ausgewerthet worden, dass die den Wellenlängen von Li.  $\alpha$ , D, F und G entsprechenden Einstellungen ein für allemal bekannt waren. Der Brechungsindex wurde nach Gl. (5) (§ 10) berechnet.

Tabelle 3.

du Bois					Rubens				
$\beta$	Ablenkung $\alpha$				$\beta$	Ablenkung $\alpha$			
	Li. $\alpha$	D	F	G		Li. $\alpha$	D	F	G
Prisma Co III									
22,4"	48,2"	40,0"	29,8"	25,1"	23,8"	51,4"	48,8"	33,4"	20,0"
21,8	46,2	41,7	36,4	29,0	24,7	52,0	45,5	37,7	28,4
19,5	—	—	—	—	21,6	—	—	—	—
21,2	47,2	40,8	33,1	27,1	23,4	51,7	47,1	35,6	24,2
$n =$	3,23	2,92	2,56	2,27	$n =$	3,21	3,02	2,52	2,04
				Mittel	$n =$	3,22	2,97	2,54	2,16
Prisma Ni II									
22,2"	17,6"	15,7"	16,8"	10,1"	23,3"	19,7"	21,3"	17,6"	16,4"
22,7	22,0	18,9	15,7	11,4	21,8	23,3	14,2	16,0	9,1
22,3	—	—	—	—	23,4	—	—	—	—
22,4	19,8	17,3	16,2	10,7	22,5	21,5	17,8	16,8	12,8
$n =$	1,89	1,77	1,72	1,48	$n =$	1,96	1,79	1,75	1,57
				Mittel	$n =$	1,93	1,78	1,74	1,52

Wir geben hier zunächst wieder zwei vollständige Beobachtungsreihen; sie sind in Tab. 3 eingetragen, welche keiner weiteren Erklärung bedarf. Wir untersuchten von jedem Metall drei Prismen, um durch Häufung von Beobachtungsmaterial die Resultate von der Individualität der Präparate und sonstigen Fehlern möglichst frei zu machen.

Tabelle 4.

Nr.		Brechungsindex $n$				
Farbe Linie		roth Li. $\alpha$	„roth“ —	gelb D	blau F	violett G
$\lambda \times 10^6$ cm		67,1	64,4	58,9	48,6	43,1
Fe	$\beta$	Eisen				
I	17,0"	3,34	—	3,03	2,61	2,23
II	20,9	3,01	—	2,84	2,63	2,15
III	26,0	3,00	—	2,59	2,08	1,78
Mittel A		3,12	3,06	2,72	2,43	2,05
Mittel B		3,02	—	2,71	2,40	2,01
Co	$\beta$	Cobalt				
I	13,5"	3,02	—	2,42	2,23	2,01
II	14,5	3,42	—	2,88	2,41	2,14
III	22,3	3,22	—	2,97	2,54	2,16
Mittel A		3,22	3,10	2,76	2,39	2,10
Mittel B		3,22	—	2,86	2,41	2,11

(Fortsetzung von Tabelle 4.)

Nr.	Farbe Linie	Brechungsindex <i>n</i> .				
		roth <i>L<sub>i</sub>. α</i>	„roth“ —	gelb <i>D</i>	blau <i>F</i>	violett <i>G</i>
	$\lambda \times 10^8$ cm	67,1	64,4	58,9	48,6	43,1
Ni	$\beta$	Nickel				
I	16,5''	2,12	—	1,89	1,71	1,46
II	22,4	1,93	—	1,78	1,74	1,52
III	27,7	2,08	—	1,85	1,68	1,63
	Mittel <i>A</i>	2,04	1,93	1,84	1,71	1,54
	Mittel <i>B</i>	2,02	—	1,83	1,72	1,56

§ 18. Die Resultate sind in Tab. 4 niedergelegt; die fettgedruckten Werthe bedeuten die arithmetischen Mittel der für die drei Prismen erhaltenen Brechungsindices. Darunter haben wir noch Zahlen angeführt und als Mittel *B* bezeichnet, welche berechnet wurden, indem wir den an verschiedenen Prismen beobachteten Werthen nach Maassgabe der Grösse des Prismenwinkels verschiedenes Gewicht beilegen. Da die Mittel *B* gegen die Mittel *A* im allgemeinen keine gesetzmässigen Unterschiede aufweisen, so folgt, dass die Resultate von dem Prismenwinkel wirklich unabhängig sind.<sup>1)</sup> Die Mittel *B* sind weiter nicht verwerthet, da den Beobachtungen an steileren Prismen aus verschiedenen Gründen kein grösseres Vertrauen gebührt, als denjenigen an flacheren. Auch die Brechungsindices für „rothes“ Licht sind hier nochmals angeführt, wie sie oben (Tab. 2) erhalten wurden; demselben entspricht ungefähr die Wellenlänge  $\lambda = 644,10^{-8}$  cm.<sup>2)</sup>

§ 19. Discussion. Ein Vergleich einiger unserer Zahlen mit den von Hrn. Kundt für Ni und Fe bei angenähert homogenem Lichte gefundenen<sup>3)</sup> ergibt Folgendes:

1. für Ni eine Uebereinstimmung, welche in Anbetracht des mehr orientirenden Charakters letzterer Werthe und der Unsicherheit in der dem „blauen“ Lichte anzurechnenden Wellenlänge genügend heissen mag;

1) Vgl. Kundt, l. c. (A) p. 264.

2) du Bois, Wied. Ann. 31. p. 956. 1887.

3) Kundt, l. c. (A) p. 266.

2. für Fe Abweichungen, welche am blauen Ende nicht sehr bedeutend sind, gegen Roth aber zunehmen.

Ob diese Abweichungen dadurch erklärbar sind, dass die Kundt'schen Prismen noch Eisenoxyd (geringerer Index, normale Dispersion<sup>1)</sup>) enthielten, oder etwa die benutzten Eisenbäder nicht chemisch rein waren, lässt sich nicht mehr entscheiden. In Anbetracht der seither von Hrn. Kundt selbst eingeführten Verbesserungen der Methode glauben wir unsere Zahlen für angenähert richtig halten zu dürfen, möchten aber wegen der relativen Schwierigkeit der Beobachtungen keinen zu engen Spielraum für deren Genauigkeit beanspruchen.

In Fig. 4 sind unsere Brechungsindices als Function der Wellenlängen in Luft aufgetragen. Man ersieht daraus, dass der Gang der anomalen Dispersion bei allen drei Metallen analog ist.

Die Werthe für „rothes“ Licht liegen, trotz dessen mangelhafter Homogenität, gut zwischen denen für  $D$  und  $Li. \alpha$ .

Eine einfache Beziehung zwischen dieser Dispersion der Brechung, und derjenigen des Kundt'schen, resp. Kerr'schen Phänomens (vgl. § 2) hat sich nicht ergeben.

### III. Schluss.

§ 20. Wir haben uns gleich zu Anfang gegen die Anlehnung an irgend eine der verschiedenen bisher vorgeschlagenen elastischen oder electricischen Lichttheorien verwahrt (§ 6). In vorliegender Arbeit haben wir uns auf die Mittheilung von Thatsachen beschränkt, die sich in einwandfreier Weise aus unseren Versuchen folgern lassen. Nach unserem Dafürhalten ist der Bereich der Thatsachen in der Metalloptik noch zu wenig ausgedehnt, um dieselben mit Erfolg zum Prüfstein der Theorien machen zu können. Die geringfügige Erweiterung, welche wir jenem Bereiche zu geben versucht haben, ändert an dieser Sachlage sehr wenig.

Der experimentellen Erforschung dieses Gebietes ist in neuester Zeit von Hrn. Drude ein werthvoller Beitrag geliefert worden, indem derselbe die beiden gewöhnlichen Re-

1) Kundt, l. c. (A) p. 267.



flexionsconstanten mit bisher kaum angestrebter Sorgfalt für eine grosse Anzahl von Metallen bestimmte. Unter Heranziehung der von ihm mit vertretenen speciellen elastischen Theorie berechnet er sodann aus seinen Messungen Brechungsindices, Extinctionsindices und Reflexionsvermögen, welche er, abgesehen von älteren Autoren, auch mit neueren Angaben von Kundt<sup>1)</sup>, Wernicke<sup>2)</sup> und dem Einen von uns<sup>3)</sup> vergleicht. Von seinen so erhaltenen Brechungsindices sind vier<sup>4)</sup> mit den von uns bestimmten direct vergleichbar, und es ergibt sich auch mit diesen eine gewisse Uebereinstimmung.

Auf unsere Anfrage hin hatte Hr. Drude die Güte auch Messungen an Cobalt, eventuell mit Berücksichtigung der Dispersion, in Aussicht zu stellen. Wir wollen daher diesen bereitwilligst zugesagten weiteren Bestimmungen hier nicht vorgreifen. Dieselben dürften Hrn. Drude zweifellos sicherere Anhaltspunkte für die Beurtheilung etwaiger Uebereinstimmungen oder Abweichungen bieten, als das bis jetzt vorliegende Material zu thun im Stande ist.

Physik. Inst. d. Univ. Berlin, 20. Juli 1890.

---

1) Kundt, l. c. (A) p. 266.

2) Wernicke, Pogg. Ann. Ergbd. 8. p. 75. 1878.

3) Rubens, Wied. Ann. 37. p. 267. 1889.

4) Drude, Wied. Ann. 39. p. 481. 1890. Es handelt sich um die  $n'$  (roth) und  $n$  (Natriumlicht) für Nickel und Stahl in der Tabelle auf p. 537.

## XII. Ueber krystallinische Flüssigkeiten; von O. Lehmann.

Nach der üblichen Definition des Begriffs Krystall muss ein Krystall nothwendig fest sein. Ich habe nun in einer vorausgehenden Arbeit<sup>1)</sup> gezeigt, dass die Anwendung der Definition auf Schwierigkeiten stösst, wenn wir zu deformirten Krystallen übergehen. Ein Krystall hört nicht auf ein solcher zu sein, wenn er verbogen oder verdreht wird, selbst wenn die deformirende Kraft die Elasticitätsgrenze überschreitet, d. h. die Form- oder Structuränderung eine bleibende wird. Der Umstand, dass Flüssigkeiten leicht deformirt werden können, da ihre Elasticitätsgrenze  $= 0$  ist, kann also kein Grund sein, die Möglichkeit der Existenz flüssiger Krystalle auszuschliessen, umsoweniger, da der Werth der Elasticitätsgrenze fester Krystalle innerhalb der weitesten Grenzen schwankt und dem Werthe Null sehr nahe kommen kann, ohne dass die optische (electriche) Anisotropie entsprechende Aenderungen erleidet.

Nachdem endlich durch die an obigem Orte besprochenen Versuche nachgewiesen ist, dass chemisch homogene optisch anisotrope Flüssigkeiten existiren, deren Anisotropie nicht durch äusseren Zwang hervorgebracht wird, erscheint es nicht nur möglich, sondern nothwendig, die Existenz flüssiger Krystalle oder krystallinischer Flüssigkeiten zuzugeben, und die Definition des Krystallzustandes entsprechend zu ändern.<sup>2)</sup>

Hieran schliesst sich die weitere Frage, sind diejenigen Flüssigkeiten, welche optisch isotrop sind, nicht krystallinisch oder sind sie regulär krystallisirt?

Bei festen Körpern ist die Unterscheidung zwischen optisch isotropen krystallisirten und amorphen Stoffen insofern einfach, als ersteren die Fähigkeit zukommt, in über-

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 40. p. 401. 1890.

2) O. Lehmann, Zeitschr. f. Krystallogr. 1890 unter der Presse.

sättigter Lösung zu wachsen, letzteren nicht. Bei Flüssigkeiten liefert dieses Merkmal keinen sicheren Anhaltspunkt, da dieselben Tropfenform annehmen und das Wachsthum von Tropfen, ähnlich wie das von Gasblasen, nicht ohne weiteres mit dem Wachsen von Krystallen verglichen werden kann.

Es wäre auch denkbar, wie ich bereits andeutete, dass krystallinische Structur in einer Flüssigkeit überhaupt nur dann möglich ist, wenn das System nicht regulär ist, insofern das Zustandekommen dieser Structur nur durch eine Art innerer Oberflächenspannung<sup>1)</sup> erklärbar scheint, welche da auftritt, wo verschieden orientirte Molecüle aneinander grenzen. Vermuthlich ist aber die Form regulärer Molecüle sehr nahe kugelförmig, sodass eine genügend grosse orientirende Kraft nicht mehr auftreten kann. Solche Flüssigkeiten wären also krystallinisch, ohne krystallinische (anisotrope) Structur zu besitzen, d. h. es fehlt die Möglichkeit, den Krystallzustand nachzuweisen.

Um nun über diese Frage Aufschluss zu erhalten, stellte ich weitere Vergleiche an zwischen dem Verhalten von Flüssigkeiten und Krystallen. Wie bekannt und in meinem Buche über Molecularphysik näher ausgeführt ist, zeigt sich eine Analogie darin, dass beide Mischungen unter sich und gegenseitig bilden können, ein Unterschied tritt aber insofern hervor, als Bildung von Mischkrystallen nur in sehr seltenen Fällen eintritt, während Mischung von Flüssigkeiten unter sich und Lösung von festen Körpern in Flüssigkeiten ganz gewöhnliche Erscheinungen sind.

Bildung von Mischkrystallen hielt man früher überhaupt nur bei isomorphen Körpern für möglich und betrachtete sie nicht als etwas der Lösung analoges, sondern als eine besondere Art chemischer Verbindungen.<sup>2)</sup> Ich habe wiederholt darauf hingewiesen, dass dies nicht der Fall ist<sup>3)</sup>, dass die Verbindungen nach veränderlichen Verhältnissen strenge von denjenigen nach constanten getrennt werden müssen, wie ja auch im Bereiche der gasförmigen Körper schon

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. phys. Chem. 5. p. 427. 1890.

2) Vgl. Kopp, Ber. d. d. chem. Ges. 17. p. 1114. 1884.

3) O. Lehmann, *ibid.* p. 1733 u. Molecularphysik. 2. p. 427.

längst ein strenger Unterschied z. B. zwischen Wasserdampf und Knallgas in der Art gemacht wird, dass man ersteres als chemische, letzteres als physikalische Verbindung oder Mischung betrachtet.

Wenn nun das Mischungs- und Lösungsvermögen in ganz besonderem Maasse den Flüssigkeiten zukommt, dagegen nur in sehr beschränktem Maasse den Krystallen, so erscheint es recht wohl möglich, dass sich vielleicht hierdurch Flüssigkeiten mit Krystallstructur von solchen ohne diese Structur unterscheiden liessen.

#### I. Lösungsvermögen flüssiger Krystalle.

Der Versuch bestätigte die ausgesprochene Vermuthung. Ich habe versucht mit den am angegebenen Orte beschriebenen krystallinischen Flüssigkeiten andere Flüssigkeiten zu mischen und darin feste krystallisirte Körper (ca. 30 bis 40 verschiedenartige und zwar solche, welche sich in dem Schmelzfluss der betreffenden Substanzen leicht auflösen) zu lösen, indess ohne den mindesten Erfolg. Wurden die fremden Substanzen in dem Schmelzfluss gelöst und nun dieser abgekühlt, so schieden sich die flüssigen Krystalle stets völlig rein als Tropfen in dem Gemenge der übrigen noch flüssigen Substanzen ab, welche erst später ganz wie andere gemischte Schmelzflüsse oder Lösungen erstarrten, bezw. Krystalle ausschieden und zwar liess sich die Reinheit dieser Tropfen mit aller Sicherheit dadurch constatiren, dass beim Erstarren derselben zu der gewöhnlichen festen krystallinischen Modification nicht der geringste Rest fremder Substanz übrig blieb.

Während also diese krystallinischen Flüssigkeiten mit anderen sich nicht zu mischen vermögen, zeigen die drei analog constituirten unter sich das vollkommenste Lösungsvermögen, ganz entsprechend der vollkommenen Mischbarkeit isomorpher Krystalle, während sie sich gegen die ganz oder nahezu flüssigen Krystalle der Reinitzer'schen Präparate ebenfalls völlig indifferent verhalten.

Hinsichtlich der Bildung von Mischkrystallen zeigen die regulären Krystalle gegenüber solchen aus anderen Systemen nach den bis jetzt vorliegenden Erfahrungen keinerlei

Vorzug. *Existiren also Flüssigkeiten mit regulär krystallinischer Structur, so ist zu erwarten, dass dieselben ebenfalls nur für sehr wenige andere, namentlich isomorphe Substanzen Lösungsvermögen zeigen, gegenüber den übrigen aber indifferent bleiben*, dieselben nicht einmal in beschränktem Maasse in sich aufnehmen. Alle optisch isotropen Flüssigkeiten zeigen aber, soweit bekannt, durchaus nicht dieses Verhalten, sie vermögen die verschiedenartigsten Körper aufzulösen und sich mit den verschiedensten anderen Flüssigkeiten zu mischen, wenn auch häufig nur in sehr beschränktem Verhältniss. Somit folgt, die Richtigkeit unserer Schlussfolgerungen zugegeben, dass Flüssigkeiten mit einer dem regulären System entsprechenden Structur unter den bekannten Flüssigkeiten nicht vorhanden, somit höchst wahrscheinlich überhaupt unmöglich sind. Damit ist aber natürlich nicht ausgeschlossen, dass die Molecüle alle diejenigen Eigenschaften besitzen, welche die Bildung einer Krystallstructur bedingen würden, falls nicht eben der Aggregatzustand der flüssige wäre.

## II. Adsorption flüssiger Krystalle.

In der früheren Abhandlung ist eine Erscheinung beschrieben und versuchsweise erklärt, von welcher gesagt ist, dass, falls sich die Unmöglichkeit regulär krystallinischer Structur des Schmelzflusses ergeben sollte, nach einer anderweitigen Erklärung gesucht werden müsse. Dieser Fall liegt nun vor.

Ich habe zunächst versucht, was geschehen würde, wenn man die in der Flüssigkeit herrschende Structur durch Bewegung derselben stört. Dabei ergab sich ein Resultat, welches nach den früheren Versuchen gar nicht erwartet werden konnte, da bei letzteren vermuthlich wegen zu geringer Dicke der Schicht und Reibung der Gläser aufeinander die vorhandenen Krystallfiguren bei Verschiebung des Deckglases rasch zerstört wurden. Der grösseren Anschaulichkeit halber füge ich hier einige schematisch gehaltene Figuren bei.

Fig. 1 zeigt das ursprüngliche Präparat, bestehend aus dicht aneinander grenzenden, mit unregelmässigen Flächen (wie sie der Zufall beim Zusammentreffen ergab), aneinander stossenden Krystallen, von welchen diejenigen, deren Schwin-

gungsrichtungen mit denen der gekreuzten Nicols zusammenfällt, ganz dunkel, die anderen je nach der Orientirung mehr oder minder hell erscheinen. Erwärmt man nun bis zum Uebergang in die flüssig krystallinische Modification, so werden die Schattirungen etwas blasser, bleiben aber im übrigen die gleichen, d. h. aus jedem festen Krystall ist ein flüssiger mit gleichgerichteten optischen Elasticitätsaxen geworden und

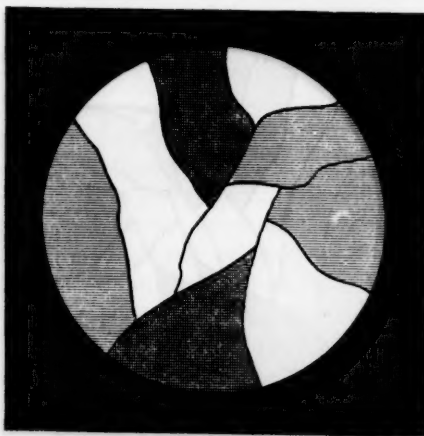


Fig. 1.

ganz wie zuvor wird beim Drehen um  $360^\circ$  jeder Krystall viermal hell und dunkel. Erwärmt man weiter bis zum Schmelzen der flüssigen Krystalle, d. h. bis zum Uebergang in die optisch isotrope flüssige Modification, so wird das Gesichtsfeld vollkommen dunkel, die Krystallfiguren scheinen gänzlich verschwunden zu sein. Lässt man aber wieder abkühlen bis von neuem Erstarrung zu den flüssigen Krystallen erfolgt (wenn hier überhaupt der Ausdruck Erstarrung erlaubt erscheint), so sind genau dieselben Figuren wieder da und man kann das Schmelzen und Erstarrenlassen beliebig oft wiederholen, ohne dass dieselben zerstört werden.

Ich habe nun untersucht, was geschehen würde, wenn man Deckglas und Objectträger gegeneinander verschiebt, während die Masse flüssig ist. Der Versuch ergab, dass sich die Erscheinung so gestaltet, als ob die Figur sowohl an der oberen wie an der unteren Glasplatte haftet, sodass das Präparat also nunmehr aussieht, wie Fig. 2 zeigt. Befinden sich kleine undurchsichtige Stäubchen in der Flüssigkeit, so gerathen sie in Bewegung, wie in jeder anderen Flüssigkeit, ohne dass die Figur im mindesten gestört wird, reiben sie

aber auf der Glasfläche, so wird dort die Figur weggenommen, wie wenn sie mit weicher Farbe auf die Glasplatte

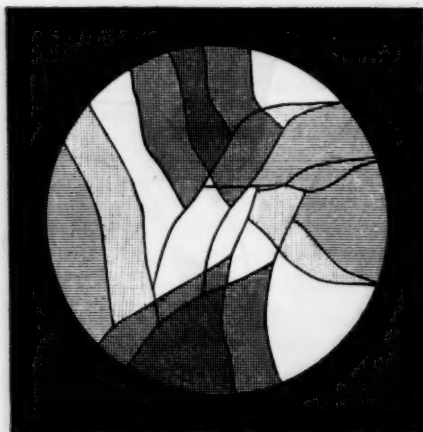


Fig. 2.

Voraussetzung ist aber stets, dass sich zwischen Präparat und Glasfläche nicht die geringste verunreinigende Schicht einschleibt, welche die Berührung von Krystallen und Glas verhindert und dass die Erhitzung des Schmelzflusses nicht zu weit getrieben wird.

Nach alledem scheint die Ursache eine ähnliche zu sein wie diejenige der Hauchfiguren. Muthmasslich wird eine dünne Schicht der in regelmässiger Orientirung zu den festen Krystallen gebildeten flüssigen Krystalle auf der Glasfläche als dünne Haut condensirt, welche nicht schmilzt, wie die übrige Masse, wenn die Temperatur bis zum Uebergang in die isotrop flüssige Modification gesteigert wird, indess beim Schmelzpunkt ihrer äusserst geringen Dicke halber nicht sichtbar wird, aber beim Abkühlen von neuem hervortritt, insofern sie als Krystallisationskern für die flüssigen Krystalle dient und deren Molecüle nöthigt, sich genau in den früheren Stellungen wieder anzuordnen oder in entsprechend geänderten Richtungen, wenn inzwischen die Glasplatten mit den darauf haftenden Häuten gegeneinander verschoben wurden.

aufgetragen wäre, kurz, die Erscheinung erinnert ganz an die Hauchbilder und analoge Phänomene. Lässt man das Präparat zur festen Modification erstarren, so bilden sich andere Krystalle als die ersten, die Figur ändert sich also, beim Erwärmen bleibt sie aber ebenso erhalten, wie die ursprüngliche u. s. w.

nicht  
hitz  
dur

II

Bild  
hab  
etw  
selb  
auf  
lich

tact  
ras  
nad  
Mis  
Ers  
dan  
tere  
beic  
ben

Mo  
ein  
der  
wir

tes  
der  
zu  
stat  
ken  
per  
war  
ans



Mit dieser Erklärung stimmt überein, dass die Figur nicht erhalten bleibt, wenn der Schmelzfluss sehr stark erhitzt wird, wobei schliesslich auch die condensirten Häute durch Schmelzen zerstört werden.

### III. Isomorphe Mischungen flüssiger Krystalle.

Bei dem besonderen Interesse, welches nach obigem die Bildung von Mischkrystallen flüssiger Krystalle beansprucht, habe ich das Verhalten derselben bei der Umwandlung noch etwas näher untersucht. Für feste Mischkrystalle ist dasselbe bereits bekannt, mag aber an einem neuen, inzwischen aufgefundenen Beispiel hier in Kürze erörtert werden, nämlich bei den Mischkrystallen von Dichlor- und Dibrombenzol.

Bringt man die Schmelzflüsse beider Substanzen in Contact, sodass sich eine breite Mischzone bildet und kühlt dann rasch ab, so erstarrt zuerst das Dibrombenzol in Form nadelförmiger Krystalle. Diese wachsen rasch gegen die Mischzone zu, dann langsamer, bis die Temperatur bis zum Erstarrungspunkt des labilen Dichlorbenzols gesunken ist, dann wieder rasch und ohne auffällige Aenderung in letzteres hinein. Es bilden sich also offenbar Mischkrystalle beider Substanzen, welche am einen Ende aus reinem Dibrombenzol, am anderen aus reinem Dichlorbenzol bestehen.

Wandelt sich nun letzteres in die gewöhnliche stabile Modification um, so schreitet die Umwandlung nur bis zu einer gewissen Grenze vor, da sie durch die Beimischung der isomorphen Substanz wie in analogen Fällen<sup>1)</sup> erschwert wird.

Man kann sich die Frage vorlegen, gibt es ein bestimmtes Mischungsverhältniss beider Substanzen, welches die Grenze der Umwandlungsfähigkeit angibt? Ich glaube dies bejahen zu können. Solange die Umwandlung nur im festen Zustande stattfindet, ist allerdings diese Grenze einigermaassen schwankend, insofern z. B. durch mechanische Erschütterung, Temperaturänderung u. s. w. selbst an solchen Stellen noch Umwandlung erzielt werden kann, an welchen die Fähigkeit dazu anscheinend nicht mehr vorhanden war. Lässt man aber das

1) O. Lehmann, *Molecularphysik*. 1. p. 788 u. ff.

Präparat von der Seite her abschmelzen, sodass die Mischzone senkrecht zur Grenze gegen den Schmelzfluss steht und kühlt unmittelbar darauf wieder ab, sodass keinerlei Strömung in dem entstandenen Schmelzfluss eintreten kann, so verschiebt sich die neue Grenze der Umwandlung noch etwas gegen die Seite des Dibrombenzols hin, indess nicht viel, sodass man wohl diese Stellung als die äusserste mögliche betrachten kann. Sie wäre dann identisch mit derjenigen, welche die Krystallisation jeder Substanz aus der Lösung im Schmelzfluss der anderen ergibt.

Ist nicht wie im betrachteten Falle nur eine der beiden Substanzen umwandlungsfähig, sondern sind es beide, so wird entsprechend die Umwandlung von beiden Seiten her gegen die Mischzone fortschreiten, und es wird von der Natur der betreffenden Substanzen abhängen, ob die Grenzen der Umwandlung zusammenfallen oder ob ein nicht (oder erst bei anderer Temperatur) umwandlungsfähiges Zwischenstück übrig bleibt.

Dieser Fall tritt nun gerade bei den flüssigen Krystallen ein, welche sich alle mit sinkender Temperatur in die gewöhnliche feste krystallisierte Modification umwandeln. Der Versuch ergab, dass in diesem Falle ganz andere Verhältnisse eintreten, insofern, da die festen Krystalle keine Mischkrystalle bilden können, jede feste Modification aus der Mischung der flüssigen Krystalle auskrystallisirt wie aus einer Lösung, dass also ganz wie bei Erstarrung zweier in Contact befindlicher mischbarer, aber im übrigen indifferenten Schmelzflüsse die Krystalle gegeneinander zuwachsen und beim Zusammentreffen sich verzinken, indem die einen in die Zwischenräume zwischen den anderen hineinwachsen.

Die Uebergangstemperatur in den festen Zustand in der Mischzone zeigte sich nur bei dem Gemisch von Azoxyphenetol und Azoxyanisol erniedrigt, welche im festen Zustande in beschränktem Maasse Mischkrystalle bilden können. Es stimmt dies überein mit der Erklärung, die ich früher<sup>1)</sup> vom moleculartheoretischen Standpunkt für die Erniedrigung

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 25. p. 183. 1885; Molecularphysik 1. p. 739 u. ff.

des Schmelzpunktes durch Mischung zweier Substanzen gegeben habe. Die flüssigen Krystalle haben nicht das Vermögen, die festen aufzulösen, wie es von gewöhnlichen Schmelzflüssen angenommen wurde, somit kann auch die darauf beruhende Erscheinung der Schmelzpunktserniedrigung nicht eintreten.

Wenn eine solche in dem genannten speciellen Fall dennoch eintritt, so liegt der Grund darin, dass in diesem Falle die beiden festen Modificationen in beschränktem Maasse Mischkrystalle bilden können, und zwar das Azoxyphenetol mit der labilen, blassgelben Modification des Azoxyanisols. In der Mischzone geht also das Gemenge der flüssigen Krystalle direct in Mischkrystalle der festen über, und es ist natürlich die Umwandlungstemperatur verschieden, sowohl von der des reinen Azoxyphenetols, wie des reinen Azoxyanisols (labil).

Die Umwandlungstemperatur des ersten ist nach den Bestimmungen Gattermann's =  $134^{\circ}$ , die des anderen für die stabile Modification =  $116^{\circ}$ . Für die labile Modification ist sie meinen mikroskopischen Beobachtungen zufolge etwas niedriger (vielleicht =  $110^{\circ}$ ) ganz entsprechend dem Satze, dass labile Modificationen niedrigeren Schmelzpunkt haben, obschon es sich hier nicht um Schmelzung, sondern Uebergang in die flüssig krystallinische Modification handelt. Die Umwandlungstemperatur der Mischkrystalle liegt also niedriger als beide ( $134^{\circ}$  und  $110^{\circ}$ ), vielleicht etwa bei  $100^{\circ}$ . Man sieht deshalb die Mischzone länger krystallinisch-flüssig bleiben und erst wenn diese (zu  $100^{\circ}$  angenommene) niedrige Temperatur erreicht ist, erstarrt sie fast plötzlich zu Krystallen von etwas anderem Aussehen als die bereits vorhandenen, zu den Mischkrystallen.

Was die Form dieser anbelangt, so habe ich versucht durch Mischung der Lösungen (in Methylenjodid) darüber Aufschluss zu erhalten, indem die Lösungen in gewohnter Weise<sup>1)</sup> in Contact gebracht wurden. Auf Seite des Azoxyanisols schieden sich grosse blassgelbe Blätter aus, welche später von den gelben (farblos-gelb dichroitischen) mono-

1) O. Lehmann, *Molecularphysik* 2. p. 561.

symmetrischen Prismen der stabilen Modification aufgezehrt wurden. Auf Seite des Azoxyphenetols bildeten sich die nadelförmigen Krystalle dieses Körpers und wuchsen regelmässig bis zur Mischzone hin. Dort machten sie Halt und erhielten nun sehr merkwürdige rechtwinklig zu beiden Seiten sich abzweigende Fortsätze, wie sie bei der Nadel *b* in Fig. 3

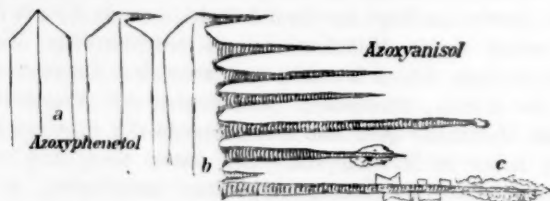


Fig. 3.

gezeichnet sind. Diese Fortsätze verjüngten sich im allgemeinen zu feinen nadelartigen Spitzen, ohne indess eine glatte Oberfläche anzunehmen, welche vielmehr zackig und vielfach quergestreift war. Da, wo die Spitzen in eine an der anderen Substanz reichere Region hineinragten, besetzten sie sich theils regelmässig, theils unregelmässig mit feinen Lamellen der labilen Modification derselben.

Dass diese Fortsätze wirklich Mischkrystalle beider Substanzen seien, wurde daran erkannt, dass sie von den allmählich sich bildenden stabilen Prismen des Azoxyanisols nach und nach aufgezehrt wurden, indess nicht im festen Zustande, sondern nur unter Vermittelung des Lösungsmittels und weit langsamer, als die reinen labilen Krystalle. Auch die grossen Blätter des Azoxyanisols nahmen da, wo sie in die Mischzone hineinwuchsen, etwas von dem Azoxyphenetols auf, wie gleichfalls aus der verminderten Umwandlungsfähigkeit geschlossen wurde.

Hierdurch scheint es erwiesen zu sein, dass die Krystalle wirklich Mischkrystalle waren, und man hat somit auch hier den Satz: „die Umwandlungstemperatur von Mischkrystallen liegt niedriger als die der reinen Substanzen“ in Uebereinstimmung mit anderweitigen Beobachtungen<sup>1)</sup> und

1) O. Lehmann, *Molecularphysik* 1. p. 739.

mit dem Satze über den Schmelzpunkt in Berührung befindlicher Körper.<sup>1)</sup>

#### IV. Ueberkühlung flüssiger Krystalle.

Da aus obigem hervorgeht, dass die flüssigen Krystalle ganz entsprechend ihrem Mangel an Lösungsfähigkeit für nicht isomorphe Körper überhaupt die feste Modification nicht in sich lösen können, so wird man bei ihnen alle diejenigen Anomalien nicht beobachten können, welche (den angenommenen Hypothesen entsprechend) ihre Erklärung darin finden<sup>2)</sup>, dass die Erstarrungstemperatur eines Schmelzflusses nicht die eigentliche Umwandlungstemperatur, sondern die Krystallisationstemperatur der Lösung der festen Modification in der flüssigen ist.

Zu diesen Erscheinungen gehört das allmähliche Festwerden überkühlter Schmelzflüsse, das Erstarren zu glasigen oder harzartigen amorphen Körpern. Isolierte Krystalltröpfchen der bei 140° schmelzenden (dritten Substanz), ringsum von Colophonium umgeben, liessen sich zuweilen bis zu gewöhnlicher Temperatur überkühlen. Sie waren dann in der That noch ebenso flüssig, wie bei höherer.

#### V. Diffusion in krystallinischen Flüssigkeiten.

Gewöhnliche mischbare Flüssigkeiten miteinander in Berührung gebracht diffundiren mehr oder minder rasch ineinander. Bereits früher<sup>3)</sup> habe ich darauf hingewiesen, dass für krystallinische Flüssigkeiten die gewöhnlichen hydrodynamischen Gesetze insofern keine Gültigkeit haben, als zu den wirkenden Kräften von selbst noch weitere Kräfte hinzukommen, die einer Art innerer Oberflächenspannung entsprechen und überall da auftreten, wo Flächen mit verschiedener Orientirung der Molecüle aneinander grenzen. Sie verschwinden erst dann, wenn die gesammte äussere und innere Oberflächenenergie ein Minimum geworden ist. Möglicherweise stellen sich diese Kräfte, welche die krystal-

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 24. p. 5. 1884.

2) O. Lehmann, Molecularphysik 1. p. 682 u. ff.

3) O. Lehmann, Zeitschr. f. phys. Chem. 5. p. 430. 1890.

linische Structur bedingen, auch dem Eintritt der Diffusion entgegen.

Zur Untersuchung der Frage wurde zunächst die Mischung von Azoxyphenetol und Azoxyanisol benutzt, da die erfolgte Mischung leicht durch die Erniedrigung des Erstarrungspunktes controlirbar ist. Bei Ausführung des Versuches war es natürlich nöthig, zu verhindern, dass vom Momente der Berührung an die Temperatur über die Schmelztemperatur, d. h. die Uebergangstemperatur in die isotrope flüssige Modification stieg, denn, wenn auch nur für eine dieser Substanzen diese Temperatur erreicht ist, findet alsbald Lösung der flüssigen Krystalle der anderen in diesem Schmelzfluss statt, und beim Wiederabkühlen krystallisiren naturgemäss aus dieser Lösung (flüssige) Mischkrystalle, der Versuch würde also nichts über die Bildung von Mischkrystallen durch Diffusion aussagen.

Es wurde deshalb zunächst eine kleine Menge des höher schmelzenden Azoxyphenetols unter einem grösseren Deckglas geschmolzen, sodass die Schmelze den Raum unter demselben nur theilweise ausfüllte. Nachdem hierauf wieder Erstarrung eingetreten war, brachte man einige Körnchen des leichter schmelzbaren Azoxyanisols an den Rand des Deckglases und erhitze bei fortwährender Beobachtung im polarisirten Lichte bis zur Umwandlung in die flüssig krystallinische Modification, welche sich durch Capillarwirkung alsbald in den noch freien Raum unter das Deckglas hineinzog und mit dem erstarrten Azoxyphenetol in Berührung kam. Nun wurde die Grenzlinie auf einen bestimmten Mikrometertheilstrich eingestellt und die Temperatur längere Zeit constant gehalten.

Es ergab sich, dass die Grenzlinie fortwährend nach der Seite des Azoxyphenetols hin wandert, dass also die Krystalle desselben sich in dem flüssig krystallinischen Azoxyanisol auflösen. Da Bildung von Mischkrystallen nur zwischen den flüssigen Modificationen möglich ist, und auch bereits bekannt ist, dass die Umwandlungstemperatur beim Contact zweier verschiedener Stoffe niedriger wird, so muss man diesen Vorgang jedenfalls so auffassen, dass nicht direct das feste Azoxyphenetol zur Auflösung gelangt, sondern

dass sich an der Grenze das flüssig krystallinische bildet und dieses allmählich in das flüssig krystallinische Azoxy-  
anisol diffundirt.

Der Versuch wurde mit genau gleichem Erfolge bei  
Azoxyphenetol und der dritten sehr leicht schmelzbaren Sub-  
stanz wiederholt.

Damit scheint erwiesen zu sein, dass das Vermögen  
fester Körper Mischkrystalle zu bilden genau dem Vor-  
gange der Mischung oder Diffusion bei flüssigen Körpern  
entspricht.<sup>1)</sup>

Karlsruhe, 17. August 1890.

1) Vgl. auch van t'Hoff, Zeitschr. f. phys. Chem. 5. p. 322. 1890.



### XIII. *Beitrag zur geometrischen Krystallographie;* *von Eug. Blasius.*

Eine Reihe von krystallographischen Problemen eignet sich ausgezeichnet zur Behandlung mit den Methoden der reinen Geometrie. Die Theorie der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme konnte auf diese Weise durchgeführt werden, und ihr schlossen sich naturgemäss die Theorien der secundären Zwillingsbildung und der Formänderungen an, die Hr. O. Lehmann verschiedentlich beobachtete, wenn eine Substanz aus einer Modification in die andere überging.<sup>1)</sup> Es war bisher Sitte, jede derartige krystallographische Aufgabe gesondert zu betrachten, und daraus haben sich manche Vortheile ergeben. Nicht ohne Nutzen lässt sich aber auch der andere Weg betreten und das einzelne Problem als Specialfall einer allgemeineren Aufgabe behandeln. Man erkennt dann besser den inneren Zusammenhang von Gesetzen, die bisher für jeden Fall immer wieder auf's Neue abgeleitet werden mussten. Natürlich zeichnet sich jeder einzelne Fall durch besondere Eigenschaften aus, die auch einer speciellen Untersuchung überlassen bleiben können — im Sinne einer methodischen Bearbeitung des Ganzen ist es aber gewiss wünschenswerth, erst die gemeinsamen Gesichtspunkte kennen zu lernen, und diese liegen in der Betrachtungsweise der neueren Geometrie sehr nahe. Genau dieselben Sätze, welche für die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme aufgezählt wurden und deren synthetische Beweise wir zum grossen Theil Hrn. Burmester verdanken, haben eine viel allgemeinere Bedeutung für die Krystallographie, als ihnen bisher eingeräumt wurde, und es ist der Zweck des vorliegenden Aufsatzes, auf diese Sätze und Methoden als auf die gemeinsame Grundlage vieler besonderen Probleme der Krystallographie hinzuweisen. Es kann kaum daran gezweifelt werden, dass auch umgekehrt

1) O. Lehmann, Wied. Ann. 22. p. 528—549. 1884. u. Zeitschr. f. Kryst. 11. p. 140—146. 1885.

die Erfordernisse des einzelnen Falles geeignet sind, Fragen anzuregen, deren geometrische Behandlung durch ihre Anwendung auf praktisch krystallographische Aufgaben manchen rein theoretischen Erörterungen gegenüber einen gewissen Reiz besitzt. Das ganze System wird sich vielleicht erst langsam aufbauen, die principiellen Schwierigkeiten sind aber in den meisten Fällen nicht gross; denn es handelt sich nahezu ohne Ausnahme um die Anwendung der Lehre von den affinen Räumen.

### § 1. Geometrie der Krystallform. Allgemeine Gesetze.

Wir können mit dem Grundgesetz der Krystallographie beginnen; denn schon bei dessen Behandlung stösst man auf das allgemeine Princip. Dieses Gesetz wird im Allgemeinen als Gesetz der rationalen Indices bezeichnet. Möbius<sup>1)</sup> hat dafür folgende zwei Ausdrücke gefunden:

„Hat man vier Ebenen, von denen keine drei einer und derselben Geraden parallel sind, und werden die von einem der vier Durchschnittspunkte  $D$  je dreier der vier Ebenen ausgehenden drei Durchschnittslinien  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  von der vierten Ebene in  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und von einer fünften in  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  geschnitten, so nenne man, wenn die zwei Verhältnisse zwischen den drei Verhältnissen

$$DA:DA', \quad DB:DB', \quad DC:DC'$$

rational sind, die fünfte Ebene  $A'B'C'$  aus den vier ersteren *arithmetisch ableitbar*. Werden ferner zu den vier ersteren Ebenen andere nach und nach hinzugefügt, dergestalt, dass jede neue mit zweien der gegenseitigen Durchschnittslinien der bereits vorhandenen Ebenen parallel ist, so heisse jede dieser neuen Ebenen aus den vier ersteren *geometrisch ableitbar*. Es lässt sich alsdann zeigen, dass jede aus den vier ersteren arithmetisch ableitbare Ebene aus ihnen auch geometrisch ableitbar ist, und umgekehrt jede geometrisch ableitbare Ebene es auch arithmetisch ist.“

Die letztere Fassung, nämlich die der geometrischen Ableitung, ist unmittelbar der Ausdruck der geometrischen That-

1) Möbius, Ber. üb. d. Verh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Cl. 1. p. 65. 1849. Abgedruckt Crelle's Journ. f. d. reine u. angewandte Math. 43. p. 365. 1852 u. Gesammelte Werke. 2. p. 351. 1896.

sachen, welche man längst in dem Zonenzusammenhange der Krystallflächen erkannt hat. Möbius selbst wurde auf die Beziehung, in der die Krystallographie zu seinen früheren Arbeiten über die geometrischen Netze steht, erst durch die Arbeiten Grassmann's aufmerksam und hat sich auch nicht eingehender damit beschäftigt. Ein Umstand scheint deshalb übrig geblieben zu sein, der wenigstens in formaler Hinsicht nicht ganz erledigt ist. Hr. Liebisch gibt nämlich einen Beweis für die erwähnte Behauptung von Möbius über die Identität der geometrischen und arithmetischen Ableitung und sagt dann<sup>1)</sup>: „Der im Vorstehenden mitgetheilte Beweis wurde zuerst von A. F. Möbius in dem für die neuere Geometrie bahnbrechenden Werke: Der barycentrische Calcul 1827 gegeben, insofern derselbe in dem Abschnitte über das geometrische Netz in der Ebene S. 266 ff., Systeme von Geraden und Punkten der Ebene, welche die Eigenschaft der Flächen und Kanten eines Krystalls besitzen, arithmetisch und geometrisch aus je vier unter ihnen ableitbar zu sein, behandelte.“ Mit diesem Satze würden wir aber zugleich die Möbius'schen Definitionen fallen lassen müssen, denn er selbst wendet die Ausdrücke geometrisch und arithmetisch ableitbar weder auf seine Netze in der Ebene, welche auf vier Stücke aufgebaut werden, noch auf die Netze im Raume, denen fünf Stücke zu Grunde liegen, an. Das wahre Analogon zu dem im Raume aus dem Tetraëder  $ABCD$  durch geometrische und arithmetische Ableitung gewonnenen System muss in der Ebene aus einem Dreieck  $ABC$  construiert werden, indem man Parallelen zu den Seiten zieht u. s. w. Werden die Seiten  $CA$  und  $CB$  von einer vierten Geraden  $A'B'$  in den Punkten  $A'$  und  $B'$  geschnitten, so heisst die vierte Gerade aus den drei ersteren arithmetisch ableitbar, wenn das Verhältniss zwischen den Verhältnissen

$$CA:CA', \quad CB:CB'$$

rational ist. Auf jeder Ebene des räumlichen Systems liegt ein solches ebenes System.

Man geht nun allen Schwierigkeiten aus dem Wege, wenn man beachtet, dass das System der krystallographischen Ebenen

1) Th. Liebisch, Geometrische Krystallographie. p. 30. 1881.

aus einem Möbius'schen räumlichen Netze dadurch entsteht, dass wir zu diesem die unendlich ferne Ebene rechnen. Die Construction stützt sich dann wieder auf fünf Ebenen und ist genau dieselbe wie für die übrigen Netze. Alle Krystallnetze sind infolge dieser Definition untereinander affin, denn wir können sie so aufeinander beziehen, dass sich ihre unendlich fernen Ebenen und je vier im Endlichen befindliche Ebenen entsprechen. Man sieht so, wie die affine Verwandtschaft geradezu schon mit dem Grundgesetz der Krystallographie verwoben ist.

Wir bezeichnen ein Möbius'sches Netz, dem die unendlich ferne Ebene angehört, als ein krystallographisches Netz. Es ist in der Natur der Sache begründet, dass man in vielen Fällen bei krystallographischen Untersuchungen mit einem Ebenenbündel auskommt, indem man durch einen Punkt Parallelen zu allen Ebenen und Kanten des Krystalls legt. Alle Ebenenbündel des krystallographischen Netzes müssen nämlich congruent und ihre homologen Ebenen parallel sein; denn jede Netzebene des einen Bündels schneidet die unendlich ferne Ebene in einer zum Netze gehörigen Geraden, und legt man durch den Mittelpunkt des anderen Bündels und diese unendlich ferne Gerade eine Ebene, so gehört auch diese zum Netze und ist der ersteren parallel. Wir können einen derartigen Ebenenbündel einen krystallographischen Ebenenbündel nennen, haben dabei aber zu beachten, dass nicht nur das krystallographische, sondern auch das allgemeine Möbius'sche Netz solche Ebenenbündel enthält, allerdings sind die verschiedenen Bündel im allgemeinen Netze weder parallel noch congruent. Die Construction des Ebenenbündels hängt mit derjenigen des Netzes natürlich eng zusammen. Die Möbius'sche geometrische Ableitung geht aus von vier Ebenen, welche ein Tetraëder bilden. Es werden dann parallel zu je zwei Kanten neue Ebenen gelegt, die ebenfalls zum System gerechnet werden, und so fährt man fort, indem man immer wieder parallel zweien Schnittlinien von Systemebenen neue Ebenen legt, die zum System gerechnet werden. Ebenen von derselben Stellung erhält man, wenn man vier Ebenen parallel den vier ersten Ebenen durch einen Punkt legt und nun einfach neue Ebenen des Systems construirt, indem man durch

je zwei Schnittgeraden der vier Ebenen neue Ebenen legt u. s. f., denn man erhält schrittweise nach diesem Verfahren Stücke, welche denen parallel sind, die man auf die andere Weise erhalten hat. Die Construction im Ebenenbündel entspricht ganz dem Constructionsverfahren von Möbius für das Netz in der Ebene und kann direct projectivisch auf dasselbe zurückgeführt werden. In dem citirten Satz von Liebisch ist, wenn wir von der Terminologie absehen, dieser Zusammenhang ausgedrückt. Auf ihn kann man das Studium der Quenstedt'schen und allgemein derjenigen Projectionsarten gründen, bei welchen die Lage der Krystallflächen durch Geraden in der Ebene dargestellt wird. Das eigentliche räumliche Netz, abgeleitet aus fünf Punkten des Raumes, hat für die Krystallographie keine unmittelbare Bedeutung. Es steht allerdings mit den krystallographischen Netzen in collinearer Beziehung.

Das Analogon zu dem krystallographischen Netze im Raum ist, wie wir gesehen haben, in der Ebene ein Netz, dem ausser dreien im Endlichen gelegenen Geraden auch die unendlich ferne Gerade angehört. Legt man durch irgend einen Punkt  $P$  der Ebene zu den drei im Endlichen gelegenen Geraden  $a, b, c$  parallele Gerade  $a', b', c'$ , so können die durch  $P$  gehenden Parallelen zu den übrigen Geraden des Netzes auch erhalten werden, indem man zu den drei Geraden  $a', b', c'$  die vierten harmonischen sucht, diese zum System rechnet und dann fortgesetzt zu je drei Systemgeraden die vierten harmonischen sucht. Es ist ja die Construction des Netzes nichts anderes als eine fortgesetzte lineare Construction am Vierseit, welche der harmonischen Beziehung zu Grunde liegt. Den Punkt  $P$  können wir als Spur der Axe einer Zone auffassen und die construirten Geraden als die Schnitte der dieser Zone angehörenden Krystallflächen. Diese kurze Ableitung führt uns zu einer Auffassung der krystallographischen Zone, die unabhängig von dem Zahlenbegriff nur so viel wie die reine Geometrie voraussetzt. Wir definiren nämlich:

Die Gesamtheit der Ebenen, welche man aus drei durch eine Gerade gehenden Ebenen durch fortgesetzte Construction der vierten harmonischen erhält, sind die krystallographischen Ebenen einer Zone.

Man gelangt zu der Gesamtheit, wenn man von drei beliebigen Ebenen derselben ausgeht.

Die sonst gebräuchliche Zonendefinition stützt sich auf den rationalen Werth des anharmonischen Verhältnisses von irgend vier Flächen, schliesst sich also enger an die arithmetische, als an die geometrische Ableitung an.

An diesem Punkte erkennt man übrigens, dass die Grundlagen der geometrischen Krystallographie mit denen der Geometrie der Lage übereinstimmen. Hr. F. Klein<sup>1)</sup> hat darauf aufmerksam gemacht, dass sich in v. Staudt's Darstellung der Projectivität eine Lücke befindet. Er selbst und die Hrn. Lüroth, Zeuthen und Darboux haben dann diesem Gegenstande eine eingehendere Untersuchung gewidmet.<sup>2)</sup> Es wurde für die Grundgebilde bewiesen, dass man „durch immer wiederholte Construction eines vierten harmonischen Elementes das ganze Gebilde in der Weise mit Elementen überdecken kann, dass in jedem noch so kleinen vorgegebenen Segmente mindestens ein construirtes Element liegt.“<sup>3)</sup>

Damit war für die Elemente, die Hr. Klein kurz die rationalen nennt, die Frage erledigt. Es gelang auch die irrationalen Elemente durch v. Staudt's Definition zu umfassen, aber nur durch weniger directe Schlüsse. Einfach gestaltet sich die projectivische Beziehung auf diesem Wege nur so weit sie sich mit den rationalen oder krystallographischen Elementen befasst.

Von Wichtigkeit für das krystallographische Netz, sowohl wie für die allgemeineren ist der Satz, dass die Fundamentalstücke, von denen man bei der Construction ausgeht, keine Ausnahmerolle spielen, dass man also dasselbe System erhält, wenn man gleichviel andere beliebig gewählte Stücke des Systemes zu Grunde legt. Wir beweisen diesen Satz zunächst für das allgemeine Möbius'sche Netz in der Ebene; der Beweis ist dann direct auf den Ebenenbündel zu übertragen; der geometrischen Allgemeinheit halber mag aber auch der syn-

1) F. Klein, Mathem. Ann. 6. p. 132. Note. 1873.

2) Mathem. Ann. I. c. u. 7. p. 531. 1874; 17. p. 52. 1880.

3) Auch Möbius hatte den Beweis geführt, dass er sich durch die Construction im Netze jedem Punkte beliebig nähern könne.



thetisch geometrische Beweis für das allgemeine Möbius'sche Netz hinzugefügt werden.

Vorausgesetzt werde, dass aus den Geraden  $a_1, b_1, c_1, d_1$  die Geraden  $a_2, b_2, c_2, d_2$  linear construierbar sind. Unser Beweis ist geführt, wenn wir zeigen können, dass umgekehrt  $a_1, b_1, c_1, d_1$  aus  $a_2, b_2, c_2, d_2$  linear construirt werden können. Wendet man genau dasselbe Constructionsverfahren auf  $a_2, b_2, c_2, d_2$  an, welches dazu diente, um diese aus  $a_1, b_1, c_1, d_1$  abzuleiten und welches wir als gegeben betrachten, so erhält man vier neue Geraden  $a', b', c', d'$ . Beziehen wir dann in der gemeinsamen Ebene der sämtlichen Geraden zwei ebene Systeme  $\Sigma''$  und  $\Sigma'$  so aufeinander collinear, dass die Geraden  $a_2, b_2, c_2, d_2$  des Systemes  $\Sigma''$  den Geraden  $a_1, b_1, c_1, d_1$  des Systemes  $\Sigma'$  entsprechen, so entsprechen die Geraden  $a', b', c', d'$  von  $\Sigma''$  den Geraden  $a_2, b_2, c_2, d_2$  von  $\Sigma'$ . Geht man von diesen letzteren nämlich  $a', b', c', d'$  und  $a_2, b_2, c_2, d_2$  aus, so kommt die Construction von  $a, b, c, d$  darauf hinaus, diejenigen Geraden in  $\Sigma'$  zu finden, welche in  $\Sigma''$  den Geraden  $a_2, b_2, c_2, d_2$  entsprechen, eine Aufgabe, die durch lineare Construction zu lösen ist.<sup>1)</sup>

Wir gehen zum Beweis für den Raum über. Seien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  die Ebenen, von denen die Construction ausgeht  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2$  die durch die Construction erhaltenen  $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$  diejenigen, die man auf demselben Wege aus  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2$  construiren kann. Wir beziehen wieder zwei Systeme  $\Sigma''$  und  $\Sigma'$  derart aufeinander collinear, dass die Ebenen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$  von  $\Sigma''$  den Ebenen  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2$  von  $\Sigma'$  entsprechen. Dann entsprechen auch  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2$  von  $\Sigma''$  beziehungsweise  $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$  von  $\Sigma'$ . Wir haben also wieder den Beweis zu führen, dass, wenn  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2$  und  $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$  gegeben sind oder mit anderen Worten  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \varepsilon_2$  und das Constructionsverfahren, wie diese Ebenen aus  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$  erhalten wurden,  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varepsilon_1$  linear construierbar sind. Wir können den Beweis auf die analogen Verhältnisse in der Ebene zurückführen. Die Ebenenbüschel  $\alpha' \beta'$  und  $\alpha_2 \beta_2$  sind in den Systemen  $\Sigma''$  und  $\Sigma'$  derart aufeinander projectivisch bezogen, dass  $\alpha_2, \beta_2$  und die durch den

1) Wiener, Darst. Geometrie. p. 248. u. 233. 1884.



Schnittpunkt der Ebenen  $\gamma_2, \delta_2, \epsilon_2$  gelegte Ebene des zweiten Büschels bezw. den Ebenen  $\alpha', \beta'$  und der durch den Schnittpunkt von  $\gamma', \delta', \epsilon'$  gelegten Ebene des ersten Büschels entsprechen. Die beiden Ebenenbüschel schneiden die Ebene  $\gamma'$  in zwei zum Netze gehörigen projectivischen Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte  $S'$  auf der Axe  $\alpha_2 \beta_2$  und  $S''$  auf der Axe  $\alpha' \beta'$  sein mögen. Durch lineare Construction ist es jetzt möglich, diejenige Gerade  $g'$  des Büschels  $S'$  zu finden, welche in  $S''$  der Schnittgeraden  $g''$  der durch den Punkt  $\gamma_2, \delta_2, \epsilon_2$  gehenden Ebene  $\eta''$  des Büschels  $\alpha' \beta'$  entspricht. Die Ebene  $\eta'$  des Büschels  $\alpha_2 \beta_2$ , welche durch  $g'$  gelegt wird, enthält den Schnittpunkt der Ebenen  $\gamma_1, \delta_1, \epsilon_1$ . Die Ebenen  $\eta'$  und  $\eta''$  sind collinear, indem der Geraden  $\alpha' \beta'$  und den Spuren der Ebenen  $\gamma', \delta', \epsilon'$  auf  $\eta'$  die Gerade  $\alpha_2 \beta_2$  und die Spuren der Ebenen  $\gamma_2, \delta_2, \epsilon_2$  auf  $\eta''$  entsprechen. Unsere Aufgabe, in der Ebene  $\eta'$  den Punkt (nämlich  $\gamma_1 \delta_1 \epsilon_1$ ) zu finden, der dem Punkte  $\gamma_2 \delta_2 \epsilon_2$  in der Ebene  $\eta''$  entspricht, lösen wir dadurch, dass wir aus dem Punkte  $\gamma' \delta' \epsilon'$  das ebene System  $\eta''$  auf die Ebene  $\eta'$  projiciren. Dann haben wir auf einer Ebene  $\eta'$  zwei dem Netze angehörige collineare Systeme, und die Construction des Punctes  $\gamma_1 \delta_1 \epsilon_1$  ist ganz nach dem oben erwähnten Verfahren (Wiener l. c.) durchzuführen. Ebenso wie den Schnittpunkt der drei Ebenen  $\gamma_1, \delta_1, \epsilon_1$  können wir natürlich auch die übrigen Schnittpunkte der fünf Ebenen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \epsilon_1$ , also diese selbst construiren.

Die vorausgehenden Untersuchungen, sowohl für den Raum, wie für die Ebene ergeben nicht nur die Möglichkeit aus irgend fünf, bezw. vier Elementen des Systems das ganze Netz zu construiren, sondern man erkennt aus ihnen auch direct das Constructionsverfahren, um aus den abgeleiteten Formen, wenn der Weg der Ableitung gegeben ist, auf die ursprünglichen Elemente zurückzukommen.

Es würde zuweit führen, hier die Anwendbarkeit der geometrischen Methoden auf die allgemeinen und speciellen Möbius'schen Netze genau zu verfolgen. Eine solche Untersuchung könnte ja das ganze Gebiet der Geometrie der Lage begreifen; aber einige wenige Punkte in Bezug auf die Netze mögen doch hervorgehoben und andere Sätze nachgetragen

werden, die sich nicht auf die Constructionen im Netze beschränken.

Die Construction des ebenen Netzes ist nur eine verallgemeinerte Construction des vollkommenen Vierecks oder Vierecks. Da Möbius die collineare Verwandtschaft überhaupt durch die Netze erhielt, so ist es ja natürlich, dass die Bestimmungsstücke in beiden Fällen übereinstimmen. Als Elemente bei der collinearen Beziehung dienen in jeder Ebene<sup>1)</sup> vier Punkte, oder ein Punkt und drei Strahlen, oder vier Strahlen, oder endlich ein Strahl und drei Punkte. Demgemäss kann man bei der Construction des krystallographischen Bündels ausgehen von vier Kanten, einer Kante und drei Flächen, vier Flächen oder einer Fläche und drei Kanten. Die reciproke Beziehung zwischen den Punkten und Geraden einer Ebene kennt man auch in der Krystallographie schon länger in dem dualen Verhältniss der Kanten und Flächen.

Man stösst bei den Constructionen im Netze auf viele interessante Figuren. Beispielsweise gehe man von dem Viereck  $ABCD$  aus, Fig. 1 (Reye I. Fig. 16, Taf. I.)  $AB$  und  $CD$

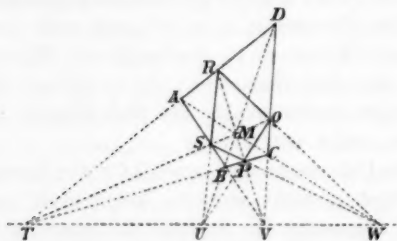


Fig. 1.

mögen sich in  $V$ ,  $BC$  und  $DA$  in  $T$  schneiden. Die Gerade  $TV$  treffe  $AC$  in  $W$  und  $BD$  in  $U$ . Verbindet man  $T$  und  $V$  mit dem Schnittpunkte  $M$  von  $AC$  und  $BD$  und bezeichnet die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden mit den Seiten des Vierecks  $ABCD$  als  $PQRS$ , so schneiden sich  $PQ$  und  $RS$  in  $V$ ,  $QR$  und  $SP$  in  $W$ , und sowohl das Sechseck  $ASPCQR$ , wie das Sechseck  $BPQDRS$  haben die Eigenschaft, zu gleicher Zeit Brianchon'sche und Pascal'sche Sechsecke zu sein.

Andere Constructionen im Netze führen zu den cyclisch-

1) Schröter, Theorie d. Oberflächen zweiter Ordnung u. d. Raumcurven dritter Ordnung als Erzeugnisse projectivischer Gebilde. p. 246.

projectivischen Gebilden.<sup>1)</sup> Auf diese und die damit zusammenhängenden Gegenstände soll hier nur beiläufig hingewiesen werden.

Wieder andere Constructionen im krystallographischen Ebenenbündel führen auf Kegelflächen zweiter und höherer Ordnung. Untersuchen wir zum Beispiel diejenigen Kanten, in welchen sich die homologen Flächen zweier Zonen von gleicher Art schneiden in einem Octanten des regulären Systems. Die Axen der Zonen von gleicher Art werden in dem Octanten, entsprechend der regulären Symmetrie, die Lage haben, wie die Normalen auf sechs in dem Octanten gelegenen Flächen eines 48-Flächners (Fig. 2). Eine beliebige Zone ist perspectivisch zu denjenigen unter den fünf anderen, zu welchen sie sich direct in symmetrischer Lage befindet, und der Schnitt entsprechender Ebenen zweier solcher Zonen ist einfach die dazwischen liegende Symmetrieebene, in Bezug auf welche sie symmetrisch sind. Ordnet man die sechs Axen, so wie man auf dieselben trifft, wenn man dem Umfange des Octanten nachgeht, so ist jede Zone symmetrisch zu ihren beiden Nachbarn und zu der, jederseits durch zwei andere getrennten Zone, dagegen nicht symmetrisch zu den beiden übrigen. Die sechs Zonen zerfallen also in zwei Gruppen von drei Zonen. Die Zonen der beiden Gruppen wechseln miteinander ab, und jede Zone ist symmetrisch zu den drei Zonen der anderen Gruppe, aber nicht symmetrisch zu den zwei übrigen Zonen der Gruppe, der sie selbst angehört. Die Zonen einer Gruppe erzeugen zu zweien, da wir sie als projectivisch gleiche Ebenenbüschel auffassen können, orthogonale Kegel.<sup>2)</sup> Also die Kanten, in welchen sich die entsprechenden Ebenen zweier gleichwerthiger

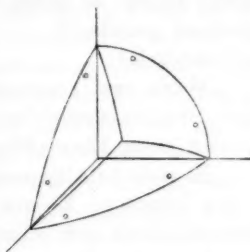


Fig. 2.

1) Vgl. Wiener, Lehrb. d. darst. Geometrie. p. 367. die l. c. angegebenen und andere Arbeiten v. Lüroth, ferner H. Wiener, Reine geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden. Darmstadt 1885.

2) Schröter, l. c. p. 70.

Zonen schneiden, liegen entweder auf einer Ebene oder auf einem orthogonalen Kegel. Die in letzterem Falle erhaltenen Strahlen oder Krystallkanten haben unter anderem die Eigenschaft, dass das Verhältniss der Sinus ihrer Neigungswinkel zu zwei in Bezug auf den Kegel conjugirten Strahlen ein constantes ist.<sup>1)</sup>

Von Sätzen, die nicht direct mit den Netzen zusammenhängen, und zum Theil als Nachtrag zu den, in den früheren Aufsätzen gegebenen Sätzen aufgefasst werden können, seien noch Folgende erwähnt.

„Wenn zwei concentrische und collineare Strahlenbündel einen Ebenenbüschel (d. h. jede Ebene desselben) entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Strahlenbüschel entsprechend gemein.“<sup>2)</sup>

und umgekehrt:

„Wenn zwei concentrische und collineare Strahlenbündel einen Strahlenbüschel entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Ebenenbüschel entsprechend gemein.“<sup>3)</sup>

„Es giebt im Allgemeinen höchstens vier Punkte, in welchen je vier homologe Ebenen von vier beliebigen projectivischen Ebenenbüscheln sich schneiden.“<sup>4)</sup>

„In zwei collinearen Strahlenbündeln gibt es im Allgemeinen unendlich viele Paare homologer Ebenen, die einander rechtwinkelig schneiden; dieselben bilden zwei Ebenenbüschel II. Ordnung.“<sup>5)</sup>

Auch mag hier kurz auf einige Formeln hingewiesen werden, deren Einfachheit ihre Aufnahme in sonst synthetisch gehaltene Arbeiten veranlasste:

„In zwei projectivischen Ebenenbüscheln gibt es zwei besondere Paare entsprechender Ebenen:

$$\sigma \text{ und } \sigma_1, \quad \tau \text{ und } \tau_1,$$

von der Art, dass sowohl  $\sigma$  und  $\tau$ , als auch  $\sigma_1$  und  $\tau_1$  zu einander rechtwinkelig sind; diese *entsprechenden rechtwinkeligen Ebenenpaare* sind immer reell vorhanden und die einzigen ihrer

1) Schröter, l. c. p. 73.

2) Reye, Die Geometrie der Lage. 2. p. 16.

3) Reye, l. c. 2. p. 17.

4) Reye, l. c. 2. p. 93.

5) Reye, l. c. 2. p. 263.

Art; ist  $\xi\xi_1$  ein beliebiges Paar entsprechender Ebenen in den beiden projectivischen Ebenenbüscheln, so bleibt das Product:

$$\operatorname{tg}(\sigma\xi) \cdot \operatorname{tg}(\tau_1\xi_1) = c.$$

von constantem Werthe, ebenso wie das Product:

$$\operatorname{tg}(\tau\xi) \cdot \operatorname{tg}(\sigma_1\xi_1) = \frac{1}{c},$$

und  $c$  heisst die Potenz der projectivischen Beziehung.<sup>1)</sup>

In zwei collinearen Bündeln entsprechen sich bekanntlich zwei rechtwinklige Dreikante (bei der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme die thermischen Axen). Sie mögen *rst* beziehungsweise  $r_1s_1t_1$  heissen.

„Aus den entsprechenden rechtwinkligen Dreikanten und Dreiflachen fliessen noch metrische Relationen, welche die collineare Beziehung in gleicher Weise beherrschen, wie die constante Potenz die projectivische Beziehung einstufiger Gebilde. Seien  $x$  und  $x_1$  ein beliebiges Paar entsprechender Strahlen der beiden collinearen Bündel; dann wird die Ebene  $[rx]$  zur entsprechenden Ebene  $[r_1x_1]$  haben; es sind aber  $r$  und  $r_1$  die Axen zweier Ebenenbüschel, für welche die Ebenenpaare  $\sigma\tau$  und  $\sigma_1\tau_1$  die entsprechenden rechtwinkligen Ebenenpaare (p. 10) sind, folglich gilt die Relation:

$$\operatorname{tg}([rx][rs]) \operatorname{tg}([r_1x_1][r_1t_1]) = \text{const.}$$

oder, wenn wir statt eines Winkels das Complement desselben setzen, können wir anstatt des constanten Products auch den constanten Quotienten setzen; ähnliche Relationen gelten auch für die beiden übrigen Axenpaare  $ss_1$ ,  $tt_1$ ; wir erhalten also drei Constanten:

$$(I) \quad \begin{cases} \operatorname{tg}([rx], [rs]). \operatorname{tg}([r_1x_1], [r_1t_1]) = k_1 \\ \operatorname{tg}([sx], [st]). \operatorname{tg}([s_1x_1], [s_1t_1]) = k_2 \\ \operatorname{tg}([tx], [tr]). \operatorname{tg}([t_1x_1], [t_1s_1]) = k_3, \end{cases}$$

die aber, wie wir leicht erkennen, nicht voneinander unabhängig sind, sondern von denen eine durch die beiden anderen ausgedrückt werden kann.“

Es findet nämlich die Beziehung statt:

$$k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1.$$

Dieselben Formeln lassen sich übrigens auch direct auf

1) Schröter, l. c. p. 10.

2) Schröter, l. c. p. 381.

das System der Normalen zu den Krystallflächen anwenden; denn auch dieses System bleibt sich bei den Veränderungen, welche wir studiren, immer collinear.

Fassen wir drei concentrische collineare Strahlenbündel in's Auge, also etwa drei Phasen bei der thermischen Ausdehnung oder sonst einer Veränderung eines Krystalls, so erzeugen diese drei Bündel eine Kegelfläche dritter Ordnung<sup>1)</sup>, in deren Strahlen sich je drei homologe Ebenen der drei Bündel schneiden. Wenn die Situationslinien oder atropischen Linien<sup>2)</sup> bei den Veränderungen, welche durch die drei Phasen gegeben sind, dieselben bleiben, so zerfällt der Kegel dritter Ordnung.

Andere Sätze, welche für die Veränderungen einer Ebene gelten, die sich collinear bleibt, sind noch von Hrn. Burmester<sup>3)</sup> aufgestellt. Dieselben lassen sich direct auf den collinear-veränderlichen Strahlenbündel übertragen. Von diesen Sätzen seien hier nur zwei erwähnt<sup>4)</sup>:

Bewegen sich vier Strahlen eines collinear-veränderlichen Strahlenbündels derart, dass sie vier collineare Strahlenbüschel erzeugen, von denen vier entsprechende Strahlen auf den selbstentsprechenden Ebenen zweier Systemphasen liegen, so bleiben drei Systemstrahlen, die Collineationsstrahlen (Situationsstrahlen, atropische Linien) und die drei durch sie bestimmten Ebenen, die Collineationsebenen, fest; alle beweglichen Systemstrahlen erzeugen collineare ebene Strahlenbüschel, von denen entsprechende Strahlen auf den

Bewegen sich vier Ebenen eines collinear-veränderlichen Ebenenbündels derart, dass sie vier collineare Ebenenbüschel erzeugen, von denen vier entsprechende Ebenen sich in einem selbstentsprechenden Strahl zweier Systemphasen schneiden, so bleiben drei Systemebenen, die Collineationsebenen (Situationsebenen, atropische Ebenen) und die drei durch sie bestimmten Schnittgeraden, die Collineationsstrahlen, fest; alle beweglichen Systemebenen erzeugen collineare Ebenenbüschel erster Ordnung, von denen entspre-

1) Reye, 2. p. 204. 1882.

2) Vgl. Wied. Ann. 22. p. 541. 1884.

3) L. Burmester, Zeitschr. f. Math. 19. p. 463. 1874.

4) L. Burmester, l. c. p. 484 ff.

Situationsebenen liegen und deren Träger die Verbindungsebenen homologer Strahlen zweier Systemphasen sind; alle beweglichen Systemebenen umhüllen Kegelflächen, welche die drei Situationsebenen berühren; alle auf einer beweglichen Systemebene liegenden Strahlen bewegen sich auf den Tangentialebenen der von dieser Systemebene umhüllten Kegelfläche.

chende Ebenen durch die Collineationsstrahlen gehen und deren Axen die Schnittgeraden homologer Ebenen zweier Systemphasen sind; alle beweglichen Systemstrahlen beschreiben Kegelflächen, welche durch die Collineationsstrahlen hindurchgehen; alle durch einen beweglichen Systemstrahl gehenden Ebenen umhüllen die Strahlen der von diesem Systemstrahl beschriebenen Kegelfläche.

Die beiden Bewegungsformen nennt Hr. Burmester für die Ebene die *geradlinige* und die *kegelschnittlinige Bewegung*.

Bei keiner von den beiden Bewegungen ist es möglich, dass ausser den Collineationsebenen (Situationsebenen, atropische Ebenen) ein rechtwinkliges Dreikant existirt, welches unverändert bleibt. Bei der ersten Bewegung würde sich eine Kante des Dreikants in einer Ebene  $\varepsilon$  bewegen, die gegenüberliegende Seitenfläche müsste daher einen Ebenenbüschel erster Ordnung beschreiben, dessen Axe die Normale von  $\varepsilon$  ist, und dies lässt sich nicht mit der Thatsache vereinigen, dass jede Ebene nach obigem Satze eine Kegelfläche beschreibt, welche die drei Collineationsebenen berührt. Bei der zweiten Bewegung muss eine Seite des Dreikants einen Ebenenbüschel erster Ordnung beschreiben. Die gegenüberliegende Kante durchläuft daher einen Strahlenbüschel in der zur Axe des Ebenenbüschels normalen Ebene, kann also nicht, wie der Satz es verlangt, eine Kegelfläche beschreiben, welche durch die drei Collineationsstrahlen geht.

Die beiden behandelten Fälle der Bewegung entsprechen den beiden Fällen der Veränderung räumlicher Systeme, welche in dem früheren Aufsatze (Satz 36 und 37) erwähnt wurden.

Es wird vielfach im Folgenden nicht nöthig sein, die nicht krystallographischen Linien und Ebenen von den anderen zu unterscheiden. Man kann die ganzen Strahlen- und Ebenen-



büschel und Bündel ebenso wie in der synthetischen Geometrie als stetige Erzeugnisse der Bewegung von Strahlen und Ebenen ansehen. In analytischer Formulirung kommt das darauf hinaus, auch die irrationalen Indices zuzulassen. Man hat dies verschiedentlich schon gethan, aber es ist nicht allgemein üblich. Principiell lässt sich nichts dagegen einwenden, die Richtung der optischen Axen, der Wärmeleitungsaxen, der thermischen Axen auch in solchen Fällen durch Indices auszudrücken, wo diese, wie es für die weniger symmetrischen Systeme die Regel ist, irrational werden. Eine derartige Bezeichnungsweise dürfte sogar in vielen Fällen consequenter sein und manche Vortheile bieten, da nicht selten bei der jetzt meist gebräuchlichen Festlegung derartiger Richtungen durch Winkelgrößen Rechnungen erforderlich werden, um die gegenseitige Lage der besagten Richtungen und der Flächen des Krystalls zu übersehen. Die Geometrie der eigentlichen Netze, bei denen also auf die lineare Construirbarkeit der Stücke aus gegebenen Elementen das Hauptgewicht zu legen ist, ist noch nicht so weit ausgebildet, wie die übrigen für unsere Zwecke nöthigen Gebiete der Geometrie. Dass aber auch die eigentlichen Netzconstructionen in vielen Fällen eine leichte Anwendung finden, kann man gleich bei der Behandlung von einigen der nächsten Sätze über Symmetrie und die orthogonalen Büschel und Bündel ersehen.

## § 2. Symmetrie. Orthogonale Büschel und Bündel.

Sind in einem krystallographischen Strahlenbüschel erster Ordnung zwei aufeinander senkrechte Strahlen vorhanden, so ist das Büschel symmetrisch zu denselben. Denn seien  $t$  und  $s$  die aufeinander senkrechten,  $p$  ein beliebiger anderer Strahl des Büschels. Dann schliesst der Strahl  $p'$ , der durch  $t$  und  $s$  von  $p$  harmonisch getrennt ist, mit  $t$  und  $s$  dieselben Winkel ein, wie  $p$  selbst, d. h. jeder Strahl  $p$  besitzt einen bezüglich  $t$  und  $s$  symmetrischen Strahl, welcher ebenfalls zum Büschel gehört. Der Satz überträgt sich nach projectivischen Grundsätzen unmittelbar auf den Ebenenbüschel. Denn sind drei Ebenen eines Büschels gegeben, von denen zwei aufeinander

1) Reye, Geometrie der Lage. 1. p. 37.

senkrecht stehen, so ist die dritte Ebene durch die beiden ersteren harmonisch getrennt von einer Ebene, welche in Bezug auf die beiden ersteren zu ihr symmetrisch liegt; folglich:

Sind in einem krystallographischen Ebenenbüschel zwei aufeinander senkrechte Ebenen vorhanden, so ist der Ebenenbüschel symmetrisch in Bezug auf diese Ebenen.

Wenn senkrecht zu einer krystallographischen Ebene eine krystallographische Kante vorhanden ist, so ist die Ebene eine Symmetrieebene des krystallographischen Netzes.

Die Ebene heisse  $\varepsilon$ , die Kante  $n$ . Durch  $n$  und irgend eine beliebige andere Kante  $a$  legt man eine Ebene, welche  $\varepsilon$  in der krystallographischen Kante  $s$  schneidet. Construirt man dann denjenigen Strahl  $a_1$ , welcher von  $a$  durch  $s$  und  $n$  harmonisch getrennt ist, so ist  $a_1$  ebenfalls eine krystallographische Kante und liegt zu  $a$  in Bezug auf  $n$  sowohl, wie auf die Ebene  $\varepsilon$  symmetrisch. Man erkennt also zugleich, dass  $n$  eine zweizählige Axe der Symmetrie für das Netz sein muss.

Durch wiederholte Anwendung des vorigen erhält man ferner noch den folgenden Satz:

Sind in einem krystallographischen Ebenenbündel drei aufeinander senkrechte Ebenen vorhanden, so sind es Symmetrieebenen des Bündels.

Im engsten Zusammenhang mit diesen Sätzen über Symmetrie stehen noch einige Sätze über orthogonale Büschel und Bündel.

Sind in einem krystallographischen Ebenenbüschel zwei Paare senkrechter Ebenen vorhanden  $\sigma\sigma_1$  und  $\tau\tau_1$ , so können wir die Ebenen des Büschels einander derart involutorisch zuordnen, dass die Ebene  $\sigma$  der auf ihr normalen  $\sigma_1$ , die Ebene  $\tau$  der auf ihr normalen  $\tau_1$  zugeordnet ist. Wir haben es dann mit einem rechtwinkligen, involutorischen Ebenenbüschel zu thun. Wenn also irgend eine Ebene  $\varepsilon$  eine krystallographische Ebene der Zone, d. h. etwa aus  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  und  $\tau$  ableitbar ist, so muss dieselbe Ableitung auf  $\sigma_1$ ,  $\sigma$  und  $\tau_1$  angewandt zu der Ebene  $\varepsilon_1$  führen, welche auf  $\varepsilon$  senkrecht steht und ebenfalls eine krystallographische Ebene des Büschels ist. Also:

Sind in einem krystallographischen Ebenenbüschel zwei Paare aufeinander senkrechter Ebenen vorhanden, so sind un-

endlich viele solcher Paare vorhanden. Jeder krystallographischen Ebene des Büschels entspricht eine andere krystallographische Ebene des Büschels, welche zu ihr senkrecht liegt.

In dem Ebenenbündel gilt ein analoger Satz:

Wenn in einem krystallographischen Bündel zwei voneinander ganz verschiedene rechtwinkelige Dreikante oder Dreifläche vorhanden sind, so sind deren unendlich viele vorhanden.

Wir können sogar die Grenze enger ziehen. Denn ist in einem krystallographischen Bündel ein rechtwinkeliges Dreikant  $r, s, t$  vorhanden und ausserdem eine Kante  $a$ , welche auf einer Krystallfläche  $\alpha$  senkrecht steht, so können wir die Kanten  $r, s, t$  den ihnen gegenüberliegenden Seiten  $\varrho, \sigma, \tau$  und die Kante  $a$  der Ebene  $\alpha$  in einem orthogonalen Polarbündel zuordnen, welches dadurch völlig bestimmt ist. Ist dann irgend eine krystallographische Ebene  $\beta$  aus  $\varrho, \sigma, \tau$  und  $a$  abgeleitet, so führt die reciproke Construction aus  $r, s, t$  und  $a$  auf eine zu  $\beta$  normale Krystallkante  $b$ .

Ist in einem krystallographischen Ebenenbündel ein rechtwinkeliges Dreikant vorhanden und ausserdem eine Krystallkante zu einer Krystallfläche normal, so steht auf jeder Krystallkante eine Krystallfläche senkrecht und umgekehrt.

Vorausgesetzt ist bei dem vorigen Satze nur noch, dass nicht die Krystallkante  $a$  in einer der Ebenen  $\varrho, \sigma, \tau$  liegt oder die Fläche  $\alpha$  durch eine der Kanten  $r, s, t$  geht.

### § 3. Transformation der Indices.

Noch weniger als Fragen der Symmetrie scheinen sich auf den ersten Blick zu einer synthetischen Behandlung die Probleme der Transformation der Indices zu eignen; trotzdem ist es mit Hülfe rein geometrischer Methoden vielfach leicht, die allgemeinen Verhältnisse derartiger Aufgaben und ihre Beziehungen zu den übrigen krystallographischen Gebieten zu erkennen. Wir ordnen bei der Transformation der Indices vier Ebenen eines Ebenenbündels vier anderen Ebenen zu. Das Ebenenbündel mit transformirten Indices ist projectivisch dem ursprünglichen. Daraus ergeben sich eine ganze Reihe von allgemeinen Sätzen.

Es gibt in dem ursprünglichen und in dem transformirten

System mindestens eine Kante und eine Ebene, höchstens drei Kanten und drei Ebenen, welche gleich bezeichnet bleiben.

Die entsprechenden Strahlen und Ebenen sind in der Theorie der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme als atropische bezeichnet worden.

Es gibt ein Paar homologer rechtwinkliger Dreikante in dem ursprünglichen und dem transformirten Systeme.

Zu jeder Ebene  $\varepsilon$  einer Zone lässt sich eine andere Ebene  $\varepsilon_1$  finden, derart, dass die mit  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$  gleichbezeichneten Ebenen des transformirten Systemes denselben Winkel einschliessen wie  $\varepsilon$  und  $\varepsilon_1$ .

In jeder Zone gibt es zwei im allgemeinen nicht krystallographische Ebenen, welche aufeinander senkrecht stehen, und deren homologe Ebenen im transformirten Systeme ebenfalls aufeinander senkrecht stehen.

Bei einer Transformation gibt es zwei Zonen, in denen je zwei gleichbezeichnete Ebenen vor und nach der Transformation dieselben Winkel einschliessen. Ebenso gibt es zwei Ebenen, in denen alle gleichbezeichneten Kanten die gleiche gegenseitige Neigung haben. Die Axen der genannten Zonen liegen in einer Seitenfläche des oben erwähnten rechtwinkligen Dreikantes und symmetrisch zu den zwei in derselben gelegenen Kanten desselben.

Bei zwei Transformationen gibt es in einer Zone nur zwei gleichbezeichnete Ebenen, welche denselben Winkel einschliessen.

Bei drei Transformationen gibt es im allgemeinen in einer Zone keine derartigen Ebenen.

Diejenigen Kanten (diesmal krystallographische), in welchen sich die gleichbezeichneten krystallographischen Ebenen einer Zone und der transformirten Zone schneiden, liegen auf einer Kegelfläche II. Ordnung.

#### § 4. Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme.

##### Elastische Deformation.

Das Problem der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme ist früher schon nach den Methoden der synthetischen Geometrie untersucht worden.<sup>1)</sup> Es repräsentirt den allge-

1) l. c.

meinsten Fall der Veränderungen, welche mit Hülfe der Lehre von der Affinität behandelt werden kann. Ausser dem Hinweis auf die in § 1 vorausgeschickten Sätze, welche entweder ganz allgemein oder unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen gültig sind, gehört noch hierher die Berichtigung einer Auffassung, welche ich von anderen übernommen hatte und die wohl allgemein getheilt wird, dass man nämlich die Möglichkeit einer Veränderung der thermischen Axen bei verschiedenen Temperaturintervallen erst in neuerer Zeit eingesehen habe. Neumann hat in einem Briefe<sup>1)</sup>, der später allerdings wohl ganz übersehen wurde, von dieser Möglichkeit gesprochen: „in allen Krystallen gibt es drei aufeinander rechtwinkelig stehende *thermische Axen*, die sich verschieden ausdehnen, wodurch allein alle Winkelveränderungen hervorgebracht werden. Es wäre möglich, obgleich nicht wahrscheinlich, dass dieses *thermische Axensystem* mit der Temperatur eine Bewegung hätte; denn der Satz bezieht sich nur auf je zweierlei Temperaturen.“

In der engsten Beziehung zu den Problemen der Wärmeausdehnung, geometrisch sogar identisch sind die Aufgaben über die homogenen elastischen Veränderungen krystallisirter Körper sowohl wie amorpher. Es würde zu weit führen, diese Analogie hier eingehend zu behandeln und die Gesammtheit der anwendbaren Sätze wieder aufzuzählen. Ausserdem ist auch die Beziehung schon öfter erwähnt worden.<sup>2)</sup>

#### § 5. Secundäre Zwillingsbildung.

Auch für dieses Problem gelten, wie früher<sup>3)</sup> bemerkt wurde, die allgemeinen Sätze. Es soll nur noch auf einige Punkte aufmerksam gemacht werden, bei denen sich die Uebereinstimmung besonders auffallend herausgestellt hat. Auf den ersten Blick erkennt man, dass die beiden Kreisebenen<sup>4)</sup>, nämlich diejenigen Ebenen, in welchen bei der Deformation

1) Neumann, Pogg. Ann. 24. p. 390. 1832.

2) l. c. u. Neumann, Vorles. üb. d. Theorie d. Elasticität. Leipzig 1885. p. 114.

3) Ztschr. f. Kryst. p. 146. 1885.

4) Reye, Geometrie d. Lage. 2. p. 267, Aufg. 33.

keine Verzerrung stattfindet, auf denen also alle Figuren sich ähnlich bleiben, sich hier wiederfinden in den beiden Ebenen, welche in diesem besonderen Falle nicht nur von Verzerrungen frei, sondern sich absolut gleich bleiben.<sup>1)</sup> Die eine der beiden Ebenen ist Gleitfläche und Zwillingssebene erfährt also auch keine Lagenänderung, die andere wird am stärksten verschoben. Von noch grösserem Interesse ist es, dass sich auch die Zonen, in denen keine Verzerrung stattfindet und welche im allgemeinen Falle als isogonale Zonen bezeichnet wurden, wieder hier ergeben. Die Axe der einen Zone ist Schiebungsrichtung, die andere Zone hat Hr. Mügge als Grundzone bezeichnet. Es ist gewiss richtiger, diese Verhältnisse in ihrem einfachen Zusammenhang mit den allgemeinen Grundgesetzen zu betrachten, als dieselben für besonders charakteristisch für den einzelnen Fall zu halten. Auch das rechtwinkelige Dreikant oder Dreiflach, welches bei der Deformation ungeändert bleibt, werden wir im vorliegenden Falle leicht wiederfinden. Die Schnittgerade der beiden Kreisebenen ist die eine Kante, die beiden anderen liegen in der dazu senkrechten Ebene und halbiren die Winkel der Kreisebenen.

Diejenige Ebene muss eine Kreisebene sein, welche sich bei einer einfachen Schiebung um eine zur Gleitrichtung senkrechte Gerade dreht und dieselbe Neigung zur Gleitfläche wieder erlangt. Der zur Drehungsaxe normale Strahl dieser Kreisebene, liegt in der zu beiden Kreisebenen normalen Ebene und hat zu der einen dieselbe Neigung vor und nach der Schiebung. Es ist also dieser Strahl die Axe der einen isogonalen Zone.<sup>2)</sup> Wenn, wie hier, die Axe der einen isogonalen Zone in eine Kreisebene fällt, so thut es auch die andere.

Uebrigens ist die Lage, in welcher sich die Ebenen eines Ebenenbündels, dessen Centrum fest bleibt, vor und nach der Deformation befinden, ein Beispiel für den oben erwähnten Satz, dass wenn zwei concentrische collineare Bündel einen Ebenenbüschel I. Ordnung entsprechend gemein haben, sie dann auch einen Strahlenbüschel I. Ordnung entsprechend ge-

1) O. Mügge, N. Jahrb. f. Min. Geol. etc. Beil.-Bd. 6. p. 274. 1889.

2) Schröter, l. c. p. 391.

mein haben müssen, und umgekehrt. In unserem Falle ist der entsprechend gemeine Ebenenbüschel die Zone der Gleitrichtung, während der Strahlenbüschel in der Ebene der Gleitfläche liegt. Man nennt Strahlenbündel in solcher gegenseitiger Lage perspectivisch.<sup>1)</sup> Die Lage bleibt auch dann perspectivisch, und zwar im gewöhnlichen Sinne perspectivisch, d. h. entsprechende Strahlen schneiden sich alle auf Punkten einer Ebene, wenn wir die Bündel so in der Richtung der Axe des entsprechend gemeinen Ebenenbüschels verschieben, dass sie keine Drehung erleiden. Dabei bleibt dann dieser Ebenenbüschel entsprechend gemein und der Schnitt der beiden Bündel bleibt sich selbst parallel.<sup>2)</sup> In unserem Falle müssen wir also die Centra der Ebenenbündel, wie sie vor und nach der Deformation sind, parallel der Gleitrichtung verschieben und erhalten dann als Schnitt der Bündel eine Ebene  $\pi$ , welche parallel der Gleitfläche selbst liegt. Ihr Abstand von den beiden Centren ist durch die Lage einer einzigen Kante vor und nach der Deformation bestimmt, denn sind diese Lagen  $k_1$  und  $k_2$ , so ist die Ebene  $\pi$  durch den Schnittpunkt von  $k_1$  und  $k_2$  zu legen. In derjenigen, der Gleitfläche parallelen Ebene  $\pi'$ , in welcher die deformirten und nicht deformirten Theile aneinander grenzen, schneiden sich entsprechende Strahlen und Ebenen von Ebenenbündeln, welche die alte und die neue Lage irgend eines Punktes zum Centrum haben.

Wenn die Axen der isogonalen Zonen in den Kreisebenen liegen sollen, so muss bei perspectivischer Lage der beiden Bündel die Verbindungsgerade deren Mittelpunkte parallel der Ebene des perspectivischen Schnittes liegen. Findet keine Ausdehnung in den Kreisebenen statt, so haben wir den Fall der Gleichheit. Anderenfalls leitet sich die Verwandtschaft der beiden Systeme aus der Gleichheit so ab, dass das eine System noch in allen Richtungen gleiche Ausdehnung erfährt. Der zugehörige Strahlenbündel behält dabei seine Form.

Zur Erleichterung der Uebersicht von Formänderungen im Ebenenbündel bietet die perspectivische Lage des ursprünglichen und des deformirten Bündels gewisse Vortheile. Es ist

1) Reye, I. c. 2. p. 17.

2) Schröter, I. c. p. 379.

um  
bei  
reie  
Zo  
Str  
in  
sch  
zwe  
Den  
eine  
brin

Gru  
ohn  
wied

§ 6.

mäs  
Vor  
keit  
sche  
vers  
jetzt  
geste  
skop  
Rück  
eines  
mit  
gleich  
dass  
der p  
Körp  
selter  
Gewi  
und

1)  
Ann. 2



um so wichtiger, dass diese perspectivische Lage nicht nur bei der erwähnten, sondern bei allen Formänderungen zu erreichen ist, und zwar immer durch Vermittelung der isogonalen Zonen. Nur ist es allerdings leider nicht immer, wie bei den Strahlenbüscheln erster Ordnung (also bei den Veränderungen in der Ebene und in der Zone) möglich, mehr als zwei verschiedene Phasen in perspectivische Lage zu dem Schnitte zweier perspectivischer Phasen des Ebenenbündels zu bringen. Denn es ist nicht immer möglich, ein ebenes System und einen collinearen Ebenenbündel in perspectivische Lage zu bringen.

Auch hier wird man wohl die Bedeutung der allgemeinen Grundsätze im speciellen Falle genügend erkennen können, ohne dass sämtliche Sätze, welche allgemein gültig sind, wieder aufgezählt zu werden brauchten.

§ 6. Umwandlungen aus einer Modification in die andere.  
Vergleich zweier Krystallformen.

Für die Kenntniss der Kräfte, welche zwischen den regelmässig angeordneten Theilen der Krystalle wirken, ist der Vorgang der secundären Zwillingsbildung von grosser Wichtigkeit; vielleicht noch wichtiger in dieser Hinsicht sind die Erscheinungen der Umwandlung, welche Hr. O. Lehmann<sup>1)</sup> an verschiedenen Krystallen beobachtete. Leider hat man bis jetzt keine genaueren Messungen über diesen Gegenstand angestellt. Die Angaben Lehmann's, welche sich auf mikroskopische Beobachtungen beziehen, sind auch gar nicht mit Rücksicht auf eine geometrische Verwerthung gemacht. Nur eines steht fest. Bei aller Aehnlichkeit, welche die Vorgänge mit denen der secundären Zwillingsbildung zeigen (man vergleiche die Figuren, welche sogar darauf schliessen lassen, dass das Volumen des Körpers ungeändert bleibt), ist doch der physikalische, vielleicht auch der chemische Charakter des Körpers vor und nach der Umwandlung verschieden. Da man selten, oder genau genommen wohl nie ganz dasselbe specifische Gewicht bei verschiedenen Modificationen desselben Körpers und noch weniger bei chemisch verschiedenen Körpern an-

1) O. Lehmann, Zeitschr. f. Kryst. 10. p. 1 u. 321. 1885. Wied. Ann. 25. p. 173. 1885. Molecularphysik. 1. p. 72 ff. 1888.

trifft (abgesehen von der zufälligen Uebereinstimmung bei verschiedenen Temperaturen), so liegt die Vermuthung sehr nahe, dass auch in diesem Falle genaue Messungen eine Verschiedenheit in dieser Hinsicht, und namentlich einen Unterschied in dem Abstände der Endflächen vor und nach der Umwandlung feststellen werden. Ob sich diese Veränderung auch auf die Ebene  $\pi'$  erstreckt, in welcher die beiden Modificationen aneinandergrenzen, und namentlich ob eine Verzerrung dieser Ebene wahrscheinlich ist, ist eine Frage ganz anderer Art. Es ist durchaus nicht ausgeschlossen, dass die Dimensionen in dieser Ebene sich nicht verändern, also bei den schönen Versuchen Lehmann's eine geometrische Deformation vorliegt, die weniger speciell ist als die secundäre Zwillingsbildung, die aber noch nicht den allgemeinen Fall der affinen oder homogenen Deformation vorstellt. Wäre dies der Fall, fände also keine Ausdehnung in der Trennungsebene der beiden Modificationen statt, so haben wieder zwei collineare Bündel, deren Centrum in der Ebene  $\pi'$  liegt und welche die Lage der Flächen des Krystalls vor und nach der Umwandlung repräsentiren, wie im Falle der secundären Zwillingsbildung einen Strahlenbüschel erster Ordnung entsprechend gemein, nämlich den in der Ebene  $\pi'$  liegenden. Sie haben also ebenfalls wieder einen Ebenenbüschel erster Ordnung (eine Zone) entsprechend gemein. Speciell für diesen Fall kann man die Axe dieser Zone sehr leicht angeben, wenn man die Lagen  $P_1$  und  $P_2$  irgend eines ausserhalb  $\pi'$  liegenden Punktes vor und nach der Deformation kennt. Die Axe der isogonalen Zone ist dann einfach die Verbindungslinie von  $P_1$  und  $P_2$ . Ausserdem wären ganz wie im vorigen Falle die beiden collinearen Bündel, deren Mittelpunkte  $P_1$  und  $P_2$  sind und deren Ebenen die Stellungen der Krystallflächen vor und nach der Deformation angeben, zu einander perspectivisch, und zwar so, dass sich entsprechende Elemente auf  $\pi'$  schneiden. Ergeben die Messungen, dass die gemachten Annahmen nicht zutreffen, so müssen allgemeinere gemacht werden. Wie dem auch sei, die Mechanik und Geometrie der erwähnten Vorgänge ist auf jeden Fall von grossem Interesse und die allgemeinen Sätze der affinen Veränderung finden auch hier eine einfache Anwendung.

Ueberhaupt kommt bei dem Vergleiche zweier Krystalle immer das Kapitel der affinen, beziehungsweise, wenn wir uns auf die Strahlenbündel beschränken, der collinearen Verwandtschaft in Betracht. Die eben behandelten Umwandlungen legen es nahe, nicht nur nach einem geometrischen, sondern auch nach einem physikalischen genetischen Zusammenhange bei dem Vergleiche von Krystallen verschiedener Modificationen zu suchen. Es wäre ein bedeutender Fortschritt, wenn es gelänge, die geometrischen Beziehungen, nach denen man viel gesucht hat, bei denen aber leider der Zufall eine grosse Rolle spielt, auf Grund der wirklich beobachteten Umwandlung der Modificationen ineinander zu begründen. Aber schon jetzt, ehe das gelungen ist, kann die Berücksichtigung der allgemeinen geometrischen Sätze bei dem Vergleiche verschiedener Modificationen oder von Krystallen, bei denen man morphotropische Beziehungen erwartet, von Nutzen sein. Haben wir in bestimmter Weise die Flächen und Kanten zweier Krystalle aufeinander bezogen, so werden wir die isogonalen Zonen, die Kreisebenen, d. h. die Ebenen, in welchen entsprechende Kanten gleiche Winkel einschliessen, ferner das rechtwinklige Dreikant<sup>1)</sup>, welches den thermischen Axen bei der Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme entspricht u. s. w., finden können. Wenn umgekehrt einzelne solche Stücke gegeben sind, beispielsweise die isogonalen Zonen, so werden wir auf die Lage der übrigen schliessen können. Kurz, wir können die Sätze der Affinität auch hier in vollem Umfange anwenden.

#### § 7. Krystallogenetisches.

Verschiedene Forscher haben nach den Ursachen der geometrischen Krystallgesetze gesucht, und da neuerdings diese wichtige Frage wieder betont worden ist, so mag hier noch Folgendes kurz erwähnt werden. Von den Erklärungsversuchen scheinen die meisten darauf hinauszukommen, die wirkenden Kräfte bei der Krystallbildung senkrecht zu den Flächen des Krystalls anzunehmen und das Grundgesetz der Krystallographie, das Zonengesetz, Gesetz der rationalen Indices oder der arithmetischen und geometrischen Ableitung als eine Folge

1) Vgl. den citirten Brief von Neumann.

der fortgesetzten Combination der Kräfte nach dem Parallelogramm der Kräfte zu entwickeln. Man geht in den meisten Fällen (das hexagonale System wird gewöhnlich anders behandelt) von drei zu drei Flächen normalen Kräften aus, deren gegenseitiges Verhältniss, nicht aber ihr absoluter Betrag, sich bestimmt durch die Lage der ersten Resultanten der drei Flächen, welche senkrecht zu einer vierten Fläche, gewöhnlich der primären Pyramide, angenommen wird. Setzt man nun nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammen, so führt man thatsächlich nur die linearen Constructionen aus, welche auf Grundlage eines Tetraëders, das die vier Kräfte zu Kanten hat, und der unendlich fernen Ebene anzustellen sind. Das heisst wir erhalten ein System von Ebenen und Strahlen, welches dem Gesetz der geometrischen Ableitung gehorcht. Die Richtungen der Kräfte bilden also, durch einen Punkt gelegt, was man einen krystallographischen Strahlen- oder Ebenenbündel nennen könnte. Die normal zu diesen Richtungen gelegten Ebenen, das System der Flächen, welches diese Kräfte hervorbringen, bildet einen dazu reciproken Ebenenbündel. Den Constructionen des Verbindens und Schneidens im einen Falle entspricht Schneiden und Verbinden im anderen, sodass also auch der resultirende Bündel von Ebenen ein krystallographischer Ebenenbündel sein muss.

Die Beziehung zwischen den beiden Bündeln, von denen der eine die Flächen und Kanten des Krystalls, der andere die dazu normalen Strahlen und Ebenen vorstellt, spielt übrigens nicht blos bei diesen mechanischen Betrachtungen eine wichtige Rolle. Sie liegt mehreren graphischen Darstellungsmethoden der Krystalle zu Grunde, hat eine eigene Symbolik hervorgerufen<sup>1)</sup> und bildet auch die Grundlage des „Assemblage polaire“ in der Bravais'schen Theorie der Krystallstructur. Andererseits findet diese Beziehung in der synthetischen Geometrie ja sehr häufig Anwendung.

#### § 7. Darstellungsmethoden der Krystalle.

Das Gebiet der Projectionsverfahren der Krystalle ist recht eigentlich dasjenige, welches für eine Anwendung der

1) Vgl. V. Goldschmidt, Index der Krystallformen der Mineralien. Berlin, Springer. 1886. Einleitung.

Geometrie der Lage geschaffen scheint. Obgleich es an einer systematischen Bearbeitung in dieser Hinsicht noch fehlt, so findet man dazu doch schon verschiedene Ansätze, beispielsweise in der geometrischen Krystallographie von Hrn. Liebisch. Auch hat Hr. E. S. Fedorow, wie mir Hr. G. Wulff mittheilt, in seinen krystallographischen Studien<sup>1)</sup> eine solche Behandlung in Angriff genommen. Es ist hier nicht der Platz, näher auf die Beziehungen zwischen den verschiedenen Projectionsarten einzugehen; die Verhältnisse sind auch nicht besonders complicirt. Wir haben es ersichtlicher Weise bei einer linearen Projection, bei welcher die Krystallflächen durch gerade Linien dargestellt werden, mit der collinearen Beziehung verschiedener Abbildungen unter sich zu thun. Dagegen stehen die anderen Abbildungen, bei welchen die Ebenen durch die Schnittpunkte der auf sie gefällten Lothe mit der Zeichenebene bestimmt sind, zu den vorigen Abbildungen in der Beziehung der Reciprocität. Endlich ist die Verwandtschaft der stereographischen Projection zu den erwähnten Projectionsarten eine specielle Verwandtschaft zweiten Grades. Die Oberfläche der Kugel ist dabei nach dem Princip der reciproken Radien conform auf einer Ebene abgebildet.<sup>2)</sup>

#### Schluss.

Seit der Veröffentlichung der früheren Aufsätze<sup>3)</sup> über diesen Gegenstand ist eine Reihe von Arbeiten eines russischen Forschers Hrn. E. S. Fedorow erschienen, welche eine Entwicklung der analytischen Hilfsmittel im Sinne der neueren Geometrie zum Ziele haben und viele Berührungspunkte mit dem vorliegenden Aufsätze besitzen. Ganz besonderen Werth scheint es mir zu haben, dass die Krystallberechnung auf diese Weise ebenfalls bedeutend einfacher gestaltet werden kann. Diese Bestrebungen und ihre Erfolge werden wohl der Auffassung des ganzen Gebietes von rein synthetischem Gesichtspunkte aus nur förderlich sein, indem die Methoden jetzt vorzüglich geeignet sind, um einander zu ergänzen. Man braucht

1) Vgl. Referate Zeitschr. f. Kryst. 17. p. 610 ff. 1890.

2) Reye, l. c. 1. p. 174.

3) l. c.

keiner der beiden Methoden zu nahe zu treten, um der anderen Vortheile zuzuerkennen. Für manche Geistesrichtung hat die synthetische den Vorzug der Uebersichtlichkeit. Wenn es im vorliegenden Aufsatz nicht gelungen sein sollte, diese Uebersicht hervortreten zu lassen, so liegt das an der Bearbeitung, nicht im Wesen der Sache. Natürlich konnte es sich an dieser Stelle auch nicht darum handeln, eine eingehendere Bearbeitung des ganzen Gebietes anzustreben. Der Lücken sind daher genug vorhanden. Das Gebiet dürfte aber auch viele Arbeitskräfte in Anspruch nehmen und reiche Früchte tragen.

Phys. Inst. d. Univ. Berlin, Sommer 1890.

G  
su  
lic  
de  
an  
sie

kle  
ren  
pro  
Tr  
Rö  
vor  
ma  
ist  
Dif  
dur  
and  
dan  
Gas  
und  
gehe  
wie  
spec  
und  
der

Tha  
die  
gehe  
dabe  
klein

#### XIV. *Die atmolytische Strömung der Gase;* *von C. Christiansen.*

I. Die Strömung der Gase wurde bekanntlich von Graham unter verschiedenen Umständen gründlich untersucht und hat zu Resultaten geführt, die von ausserordentlicher Bedeutung für unsere Anschauungen über die Natur der Gase gewesen sind. Ich werde hier in grossen Zügen an seine Arbeiten und deren Ergebnisse erinnern, insoweit sie für meine Arbeit von Bedeutung gewesen sind.

Effusion nennt Graham die Strömung der Gase durch kleine Löcher in dünner Wand oder durch sehr kurze Röhren. Er findet das durchgehende Luftvolumen umgekehrt proportional der Quadratwurzel des specifischen Gewichtes. Transpiration nennt er die Strömung durch lange und enge Röhren. Hier ist das hindurchgegangene Volumen abhängig von einer besonderen Constante, der Reibungsconstante; setzt man diese Constante für Sauerstoff gleich der Einheit, dann ist sie für Wasserstoff 0,437 und für Kohlensäure 0,727. Als Diffusion endlich bezeichnet er die Strömung der Gase, theils durch poröse Scheidewände, theils ihre Strömung durcheinander. Nehmen wir hier das Wort in der ersten Bedeutung, dann hat Graham gezeigt, dass die Diffusion gemischter Gase von einer Scheidung der Bestandtheile begleitet ist, und dieses Phänomen nennt er Atmolyse. Die hindurchgehenden Volumina verschiedener Gase verhalten sich hier, wie bei der Effusion umgekehrt wie die Quadratwurzel der specifischen Gewichte. Graham erblickt in der Diffusion und Atmolyse eine Wirkung der molecularen Beweglichkeit der Gase; er drückt sich darüber in folgender Weise aus.

„Die Poren des künstlichen Graphit scheinen in der That so klein zu sein, dass das Gas in Masse gar nicht durch die Platte dringen kann. Es scheinen nur Molecüle hindurchgehen zu können, und von diesen ist anzunehmen, dass sie dabei gar nicht durch Reibung behindert werden, denn die kleinsten Poren, die man sich als vorhanden im Graphit



denken kann, müssen Tunnels an Grösse gegen die Atome eines gasförmigen Körpers sein. Die einzige bewegende Kraft dabei scheint jene innere Bewegung der Molecüle zu sein, welche gegenwärtig allgemein als eine wesentliche Eigenschaft des Gaszustandes der Materie angesehen wird.<sup>1)</sup>

Obleich die Versuchsergebnisse von Graham an und für sich gewiss unanfechtbar sind, hat man doch in neuerer Zeit vielfach seine Versuche anders gedeutet. Zwar fand Hr. R. Bunsen, dass die Atmolyse nicht direct durch Verschiedenheiten im Absorptionsvermögen des porösen Körpers bedingt sein könnte, Hr. G. Hüfner<sup>2)</sup> kommt aber in seinen Versuchen über die Diffusion von Gasen zu dem Resultate, dass die Absorption eine bedeutende Rolle spielt. Er drückt sich folgendermaassen aus:

„Der Graham'sche Satz, dass die Diffusionsgeschwindigkeiten der verschiedenen Gase sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus deren specifischen Gewichten verhalten, dürfte zwar nach dem oben bereits Angeführten kaum noch ernsthafte Vertheidiger finden; immerhin ist es doch interessant genug, die von mir am Hydrophan gefundenen Werthe mit den nach Graham's Hypothese verlangten zu vergleichen . . . . Man sieht, dass auch die vorstehenden Versuche Zahlenwerthe geliefert haben, die sich den verlangten annähern, und die man daher wohl noch als Stützen der von Graham gehegten Anschauung anführen könnte. Es wird sich indessen aus dem Folgenden ergeben, dass der Diffusionsvorgang beim Hydrophan wie beim Kautschuk durch Absorptionsvorgänge complicirt ist.“

Es muss gewiss zugegeben werden, dass Unterschiede im Absorptionsvermögen die Sache sehr compliciren müssen, ich hoffe aber, in dieser Arbeit zeigen zu können, dass es Verhältnisse gibt, unter welchen die Anschauung von Graham sich bestätigen, und namentlich, dass die Atmolyse durch poröse Körper wesentlich als eine rein mechanische Erschei-

1) Graham, Pogg. Ann. **120**. p. 415. 1863. nach Phil. Trans. **153**. p. 385. 1863.

2) Hüfner, Wied. Ann. **26**. p. 253. 1882.

nu  
di  
lie  
  
wu  
de  
ta  
wö  
vo  
an  
ret  
Es  
sch  
wä  
Ri  
Fa  
die  
ge  
wo  
erh  
ku  
  
set  
san  
erg  
W  
im  
set  
set  
ein  
ist  
Na  
sei  
sol  
erg  
ber  
Ku

p. 1

nung zu deuten ist. Dass es aber auch viele Fälle gibt, wo die Sache anders steht, kann jedoch keinem Zweifel unterliegen.

Die Versuche, über die hier berichtet werden soll, wurden durch Untersuchungen über die innere Reibung der Gase veranlasst. Wie einfach und constant die Resultate, die man durch Transpirationsversuche erhält, auch gewöhnlich sind, so lehrt doch ein genaueres Studium, sowohl von Graham's, als von späteren Arbeiten, dass es gewisse anomale Verhältnisse gibt, die noch nicht durch die theoretischen Arbeiten über diesen Gegenstand klar gestellt sind. Es schien mir wahrscheinlich zu sein, dass man neue Aufschlüsse erhalten könnte, wenn man die Röhre viel enger wählte, als man es bis jetzt gethan hatte. Versuche in dieser Richtung scheiterten doch an dem Umstand, dass in diesem Falle sehr wenig Luft hindurchgeht. Ich versuchte dann, die Gase zwischen Platten strömen zu lassen; es waren plan-geschliffene Glasplatten, die gegeneinandergedrückt wurden, wodurch es möglich wurde, genau messbare Luftvolumina zu erhalten. Ehe ich die Versuche selbst beschreibe, werde ich kurz andeuten, welche Resultate ich aus ihnen erwartete.

Maxwell's Theorie für die innere Reibung der Gase setzt voraus, dass in der strömenden Masse sehr viele Zusammenstösse in der Zeiteinheit stattfinden; die Reibung ergibt sich dann als unabhängig von der Dichte des Gases. Wird nun das Rohr, in welchem die Strömung stattfindet, immer enger und enger genommen, dann gelten die Voraussetzungen nicht mehr, und die Strömung muss anderen Gesetzen folgen. Nun ist die mittlere Weglänge der Gase zwar eine kleine Grösse, sie liegt in der Nähe von  $0,0,1$  mm, ist also etwa 5—6 mal kleiner als die Wellenlänge des Natriumlichtes; es schien mir deshalb sehr wahrscheinlich zu sein, dass die Strömung der Gase durch enge Spalten von solcher Weite neue Gesetze der Strömungsgeschwindigkeit ergeben würde. Es gehen somit meine Versuche in derselben Richtung, wie die wichtigen Untersuchungen der Herren Kundt und Warburg<sup>1)</sup> über die Reibung und Wärme-

1) Kundt u. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 337, 525. 1875; 156. p. 177. 1875.

leitung verdünnter Gase. Strömt nun ein Gas zwischen zwei Platten, deren Abstand einige Wellenlängen beträgt, dann steht zu erwarten, dass die von Graham gefundenen Gesetze für die Transpiration gelten werden, und dass gemischte Gase unverändert in ihrer Zusammensetzung hindurchgehen werden. Nähern sich aber die Platten einander soweit, dass ihr Abstand bedeutend kleiner als eine Wellenlänge wird, dann müssen die Gase ohne eigentliche Reibung hindurchgehen, und gemischte Gase sich theilweise scheiden. In diesem Falle muss also die Strömung annäherungsweise nach den von Graham für die Diffusion durch poröse Körper gefundenen Gesetzen geschehen. Diese Erwartungen sind auch im wesentlichen erfüllt worden.

II. Ich benutzte zu diesen Versuchen zwei Plangläser *A* und *B* Fig. 1. Sie hatten beide die Form eines regulären

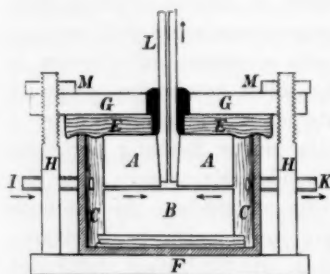


Fig. 1.

Achtecks; die Breite war 4, die Dicke 1,5 cm. Die Platte *A* war in der Mitte durchlöchert und mit einem eingeschliffenen Rohr *L* versehen. Die Platten wurden, wie die Figur zeigt, aufeinander gelegt und in einen runden Messingbehälter *CC* gebracht. Als Deckel diente eine Kautschukplatte *EE*.

Das ganze wurde mittelst

zweier Schrauben *HH* zusammengepresst. Um es einigermaßen dicht zu halten, wurde um *L* etwas Quecksilber gegossen. Wenn ein Versuch gemacht werden sollte, wurde *L* mit einer Sprengel'schen Luftpumpe in einer von Hrn. Docent K. Prytz angegebenen Construction in Verbindung gesetzt. Durch das Rohr *I* wurde das zu untersuchende Gas herein, durch *K* wieder hinausgeführt. Es strömte dann das Gas zwischen den Platten *A* und *B* vom Rande nach der Mitte hin und wurde mittelst der Pumpe über Quecksilber angesammelt. Die Versuche sind bei dieser Anordnung recht bequem anzustellen, nur dauert es eine ziemlich lange Zeit,

bis eine messbare Quantität durchgesaugt ist, wenn die Platten sehr stark gegeneinander gedrückt sind.

Es wurde nun getrocknete atmosphärische Luft mittelst der Pumpe angesammelt. Der Luftdruck war 748,4 mm, die Temperatur 16,4°, der Druck in der Pumpe 33,4 mm, die bewegende Druckdifferenz folglich 715 mm; unter diesen Umständen strömten in 1020 Secunden 3,64 ccm Luft in die Pumpe über. Als der Versuch wiederholt wurde, ging dieselbe Luftmenge in 1017 Secunden hindurch. Nimmt man an, dass das durchgehende Luftvolumen der Druckdifferenz proportional ist, so findet man das in der Stunde durchströmende Luftvolumen gleich:

$$\frac{3600}{1018,5} \cdot \frac{748,4}{715,0} \cdot 3,64 = 13,5 \text{ cm}^3.$$

Es ist zu bemerken, dass der Luftdruck selbst ohne Einfluss ist; bei vergrössertem Drucke geht zwar mehr Luft hindurch; weil es aber auch unter grösserem Druck aufgesammelt wird, erhalten wir dasselbe Volumen. Aehnliche Versuche wurden mit Wasserstoff und Kohlensäure bei denselben Abstände der Platten ausgeführt und ergaben:

	cm <sup>3</sup> in der Stunde	Verhältniss
Atmosphärische Luft . . . . .	13,5	1,00
Wasserstoff . . . . .	38,9	2,89
Kohlensäure . . . . .	14,0	1,04

Nun wurden die Platten stärker zusammengedrückt, und es ging dann nicht nur weniger Gas hindurch, sondern das gegenseitige Verhältniss ist auch ein anderes geworden:

	cm <sup>3</sup> in der Stunde	Verhältniss
Atmosphärische Luft . . . . .	1,30	1,00
Wasserstoff . . . . .	4,20	3,24
Kohlensäure . . . . .	1,08	0,83

Für dieselben Gase sind die in gleicher Zeit bei der Transpiration und der Diffusion durchströmenden Volumina nach Graham:

	Transpiration	Diffusion
Atmosphärische Luft . . . . .	1,00	1,00
Wasserstoff . . . . .	2,06	3,80
Kohlensäure . . . . .	1,24	0,81

Vergleichen wir die oben gefundenen Werthe mit den zuletzt angeführten, so zeigt es sich deutlich, dass wir in den ersten Versuchen die Strömung als eine Transpiration, in den letz-

ten als eine Diffusion zu betrachten haben; es ist somit bewiesen, dass die Strömung zwischen Platten bei grösseren Abständen als eine Transpiration anzusehen ist, und dass sie, wenn der Abstand kleiner gemacht wird, in die Diffusion übergeht. Dass derselbe Uebergang auch für Röhren stattfinden muss, folgt von selbst.

*Es ist somit bewiesen, dass es einen continuirlichen Uebergang von der Transpiration zur Diffusion gibt, was auch mit Graham's Anschauungen in Uebereinstimmung ist und als eine nothwendige Folge der kinetischen Theorie der Gase zu betrachten ist. Weitere Belege dafür sollen im Folgenden gegeben werden.*

Man muss nach alle dem erwarten, dass gemischte Gase, wenn ihre specifischen Gewichte verschieden sind, mit verschiedenen Geschwindigkeiten durch den Zwischenraum der Platten strömen werden, und dass folglich eine Atmolyse stattfinden wird. So verhält es sich in der Wirklichkeit auch, wie aus den folgenden Versuchen hervorgehen wird.

Es wurden Sauerstoff und Wasserstoff in verschiedenen Verhältnissen gemischt und zwischen den Platten hindurchgetrieben. Es zeigte sich dann immer, dass das angesammelte Gas procentisch mehr Wasserstoff enthielt, als die ursprüngliche Mischung. Die Resultate einiger solcher Versuche sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Vor der Atmolyse % O	Atmolyse % H	Nach der Atmolyse % O	Atmolyse % H	cm <sup>3</sup> in der Stunde
22,5	77,5	13	87	1,88
34	66	25	75	0,75
40	60	31	69	1,57
56	44	45,5	54,5	1,24
81	19	74	26	0,70

Man sieht deutlich, dass Atmolyse stattgefunden hat; weitere Schlüsse lassen sich doch nicht aus diesen Versuchen ableiten, weil die Versuchsbedingungen zu unbestimmt sind.

Versucht man es, die Platten durch stärkeren Druck einander näher zu bringen, so wird die Strömung bald so langsam, dass mehrere Tage vergehen, bis man eine messbare Quantität aufgesammelt hat. Ich nahm deshalb etwa hundert Platten vom dünnsten Stanniol, die in der Mitte durchlöchert

waren und legte sie zwischen die Glasplatten, und dadurch ward es wirklich möglich, die Atmolyse bedeutend weiter zu treiben.

Zuerst wurde die Strömungsgeschwindigkeit des Sauerstoffes und des Wasserstoffes, jedes für sich, gemessen. In einer Stunde wurde angesammelt:

		Verhältniss
Sauerstoff	1,10 cm <sup>3</sup>	1,00
Wasserstoff	4,10 "	3,73

Wurde dagegen electrolytisch entwickeltes Knallgas gebraucht, so erhielt ich nach der Atmolyse in einer Stunde folgende Mischung:

		Procent
Sauerstoff	0,56 cm <sup>3</sup>	21,4
Wasserstoff	2,05 "	78,6
	2,61 cm <sup>3</sup>	100,0

Das Gemisch war also bedeutend reicher an Wasserstoff geworden.

Der Versuch wurde am nächsten Tage wiederholt. Wurden die Gase gesondert untersucht, so erhielt ich in einer Stunde:

		Verhältniss
Sauerstoff	0,43 cm <sup>3</sup>	1,00
Wasserstoff	1,66 "	3,86

Das Verhältniss der Geschwindigkeiten nähert sich immer mehr ihrem theoretischen Werthe, nämlich 4; man kann daraus schliessen, dass der Zwischenraum der Platten kleiner geworden ist. Bei Knallgas strömte nun in zwei Stunden 2,157 cm<sup>3</sup> Gas hindurch; es bestand aus:

		Procent
Sauerstoff	0,447 cm <sup>3</sup>	20,7
Wasserstoff	1,710 "	79,3
	2,157 cm <sup>3</sup>	100,0

Es muss also angenommen werden, dass *gemischte Gase sich theilweise scheiden, wenn sie durch recht enge Spalten oder Röhren strömen*; soll diese Atmolyse aber einigermaassen intensiv sein, so muss der Abstand der Platten bedeutend kleiner als die Wellenlängen des Lichtes sein; denn bei den hier angewandten Abständen waren gar keine Interferenzerscheinungen mehr zu beobachten.





Es zeigen sich also dunkle Interferenzstreifen, wenn:

$$(7) \quad \frac{\sin \frac{2\pi Na \cos \beta}{\lambda}}{\cos \beta} = 0.$$

Es seien  $ABC$  und  $A'B'C'$  (Fig. 2) zwei rectanguläre Glasprismen, deren Hypotenusenflächen  $AB$  und  $A'B'$  einander parallel sind, und wenden wir die obenstehenden Formeln auf die Zurückwerfung des Lichtes von der Fläche  $AB$  an. Bezeichnen wir durch  $n$  das Brechungsverhältniss des Glases, durch  $L$  die Wellenlänge des Lichtes im Raume  $ABB'A'$ , dann ist  $Nn = 1$  und  $n\lambda = L$ . Statt Formel (7) erhalten wir dann:

$$(8) \quad \frac{\sin \frac{2\pi a \cos \beta}{L}}{\cos \beta} = 0.$$

An der Grenze der totalen Reflexion ist  $\beta = \frac{1}{2}\pi$  und (8) ist folglich nicht erfüllt. Dies ist dagegen der Fall, wenn:

$$(9) \quad \cos \beta = \frac{L}{2a}, \quad \frac{2L}{2a}, \quad \frac{3L}{2a}, \dots$$

Die Anzahl der dunklen Streifen wird also, wenn  $\beta$  von  $\frac{1}{2}\pi$  bis 0 abnimmt, gleich  $2a/L$ . Ein von der Fläche  $AB$  reflectirter Strahl  $DE$  wird an der Fläche  $AC$  gebrochen und geht in der Richtung  $EF$  fort; bezeichnen wir mit  $b$  und  $i$  die Winkel, die  $DE$  und  $EF$  mit der zu  $AC$  senkrechten Richtung einschliessen, so haben wir, wenn  $BAC = p$ , dass:

$$\sin \beta = n \sin \alpha, \quad \sin i = n \sin b, \quad \alpha + b = p$$

Es seien  $\alpha_0$ ,  $b_0$  und  $i_0$  die Werthe von  $\alpha$ ,  $b$  und  $i$ , die der Grenze der totalen Reflexion entsprechen; nehmen wir weiter an, dass  $\beta$  nur wenig von  $\pi/2$  verschieden ist, wir haben dann  $\alpha = \alpha_0 + \delta\alpha_0$ ,  $b = b_0 + \delta b_0$  und  $i = i_0 + \delta i_0$ . Es ist dann:

$$\sin \beta = 1 + n \cos \alpha_0 \delta\alpha_0, \quad \cos i_0 \delta i_0 = n \cos b_0 \delta b_0.$$

und:

$$1 - \sin \beta = \frac{\cos^2 \beta}{1 + \sin \beta} = \frac{1}{2} \cos^2 \beta.$$

Es ist auch  $\delta\alpha_0 + \delta b_0 = 0$ . Man findet nun, dass:

$$\cos \beta = K \sqrt{\delta i_0}, \quad K = \sqrt{\frac{2 \cos i_0 \cos \alpha_0}{\cos b_0}}.$$

Die Werthe von  $\delta i_0$ , die den dunklen Streifen entsprechen, werden demnach die folgenden:

$$(10) \quad \delta i_0 = \frac{L^2}{4a^2 K^2}, \quad \delta i_0 = \frac{4L^2}{4a^2 K^2}, \quad \delta i_0 = \frac{9L^2}{4a^2 K^2}, \quad \dots$$

Die Breiten der Streifen verhalten sich somit wie die Reihe der ungleichen Zahlen 3, 5, 7 ... Diese Interferenzstreifen sind zuerst von W. Herschel<sup>1)</sup>, später von Talbot<sup>2)</sup>, Mascart<sup>3)</sup> und Lord Rayleigh<sup>4)</sup> behandelt worden.

Ich gebrauchte zu den folgenden Versuchen zwei Prismen, die mir Hr. Joh. Thiele geschenkt hatte. Hr. Thiele selbst hatte sie geschliffen, und sie waren besonders genau gearbeitet. Wurden die Hypotenusenflächen gegeneinander gedrückt, so hafteten sie dergestalt aneinander, dass sie nur dadurch getrennt werden konnten, dass man sie in kaltes Wasser brachte; dann trennten sie sich langsam voneinander, vom Rande anfangend. Die Grössen der Winkel waren:

$$\begin{aligned} A &= 45^\circ 36', & B &= 45^\circ 17', & C &= 89^\circ 8', \\ A' &= 45^\circ 11', & B' &= 45^\circ 13', & C' &= 89^\circ 36'. \end{aligned}$$

Um das Brechungsverhältniss zu bestimmen, wurden  $\angle A = p$  und die Minimalablenkung der Fraunhofer'schen Linien *C*, *D* und *F* gemessen; die Resultate sind in der folgenden Tabelle enthalten.

$$p = 45^\circ 36' 10''.$$

	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>F</i>
<i>n</i>	1,57434	1,57810	1,58812
$\alpha_0$	39° 26' 2"	39° 19' 18"	39° 1' 35"
$\beta_0$	6° 10' 8"	6° 16' 52"	6° 34' 35"
$i_0$	9° 44' 25"	9° 56' 32"	10° 28' 46"
<i>K</i>	1,2374	1,2382	1,2401

Fällt Natriumlicht durch *BC* (Fig. 2) auf die Hypotenusenfläche *AB* und betrachtet man das reflectirte Licht mittelst eines astronomischen Fernrohres, so sieht man das

1) W. Herschel, Phil. Trans. 1809. p. 259.

2) Talbot, Phil. Mag. (3) 9. p. 401. 1836.

3) Mascart, Compt. rend. 108. p. 591. 1889.

4) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 28. p. 77, 189. 1889.

in Fig. 3 gezeichnete Interferenzphänomen. Um es recht scharf zu erhalten, müssen die Flächen  $AB$  und  $A'B'$  genau parallel sein. Man erreicht dies am einfachsten, wenn man zwischen die Prismen ein recht dünnes Stanniolblatt, das in der Mitte durchbohrt ist, legt. In der Focalebene des Fernrohres war ein in Zehntelmillimeter getheilter Glasmaassstab angebracht.  $1^\circ$  entsprach 4,2541 mm, und 1 mm entsprach einem Winkel, dessen Sinus gleich 0,004103 war. Mit dem genannten Stanniolblatt konnten die ersten sechs dunklen Streifen ziemlich genau gemessen werden. Die Resultate waren:

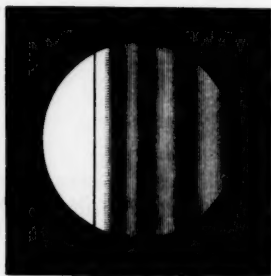


Fig. 3.

1	2	3	4	5	6 Streifen
2,46	2,69	3,08	3,63	4,32	5,18 mm

Die Differenzen sind:

0,23	0,39	0,55	0,69	0,86 mm
------	------	------	------	---------

Durch Division mit 3, 5, 7, 9, 11 erhalten wir:

0,077	0,078	0,079	0,077	0,078 mm.
-------	-------	-------	-------	-----------

Nun ist nach (10):

$$\frac{L^2}{4a^2K^2} = \frac{5,18-2,46}{6^2-1} \cdot 0,004103 = 0,0318.$$

Setzen wir  $L = 0,0587$  mm, dann wird:

$$a = 0,0133 \text{ mm.}$$

Wenn die Luftschicht immer dünner wird, vergrössert sich nach (10) nicht nur der Abstand der Streifen voneinander, sondern sie entfernen sich auch mehr und mehr von der Grenze der Totalreflexion. Betrachtet man die Streifen durch die Kathetenfläche  $AC$  (Fig. 2) und drückt man die Prismen immer mehr gegeneinander, so werden die Streifen immer breiter und wandern zugleich nach der Kante  $A$  hin, wo sie zuletzt verschwinden. Um dies anschaulicher zu machen, folgen die Werthe von  $i - i_0$  für die zwei ersten dunklen Streifen für Natriumlicht berechnet:

$$(17) \quad D^2 = \sin^2 \arctg \frac{\pi a \sqrt{n^2 - 1}}{Ln^2}.$$

Das Verhältniss zwischen dem zurückgeworfenen und dem durchgehenden Lichte wird dann gegeben durch:

$$\frac{C^2}{1 - C^2} = \left( \frac{\pi a \sqrt{n^2 - 1}}{L} \right)^2, \quad \frac{D^2}{1 - D^2} = \left( \frac{\pi a \sqrt{n^2 - 1}}{Ln^2} \right)^2.$$

Es lässt sich in dieser Weise die Dicke der Luftschicht mit Leichtigkeit messen.

Es seien  $F$  und  $G$  (Fig. 4) zwei weisse Papierflächen,  $E$  eine Stearinkerze,  $ABC$  und  $A'B'C'$  die Prismen.  $F$  und  $G$  sind symmetrisch zur Berührungsfläche der Prismen aufgestellt in der Weise, dass die Lichtstrahlen an der Grenze der totalen Reflexion zurückgeworfen werden. Die Abstände  $EG$  und  $EF$  bezeichnen wir mit  $l_1$  und  $l_2$ . Es sei  $Q$  die Intensität des von  $E$  ausgestrahlten Lichtes; auf die Fläche  $BC$  fällt dann eine Lichtmenge, die sehr nahe mit:

$$\frac{1}{2} \frac{Q}{l_1^2}$$

proportional ist.

Dieser Strahl wird zuerst an  $BC$  gebrochen,

dann von  $BA$  zurückgeworfen und endlich wieder an  $AC$  gebrochen. Nach der letzten Brechung wird seine Intensität proportional:

$$\frac{1}{2} c^4 C^2 \frac{Q}{l_1^2}$$

sein. Für den aus  $AC$  austretenden Strahl, dessen Schwingungsrichtung parallel der Einfallsebene ist, haben wir ebenso die Intensität proportional:

$$\frac{1}{2} d^4 D^2 \frac{Q}{l_1^2}.$$

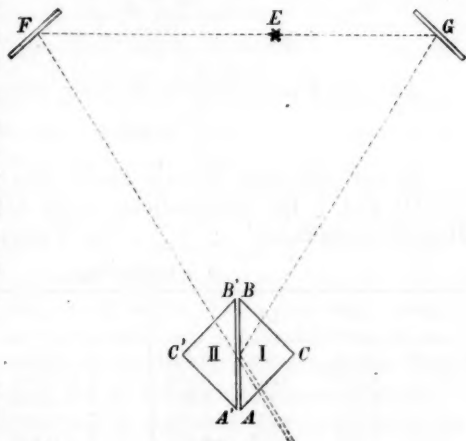


Fig. 4.

Dicke der Luftschicht in Wellenlängen	Erster dunkler Streifen $i - i_0$	Zweiter dunkler Streifen $i - i_0$
$\infty$	0° 0' 0''	0° 0' 0''
20	0 1 24	0 5 36
15	0 2 29	0 9 57
10	0 5 36	0 22 25
5	0 22 25	1 30 8
4	0 35 4	2 21 16
3	1 2 24	4 12 57
2	2 21 16	9 44 4
1	9 44 4	

Für  $n \sin \alpha > 1$  tritt Totalreflexion ein. Die Intensität  $A^2$  des zurückgeworfenen Lichtes ist dann ausgedrückt durch:

$$(11) \quad A^2 = \sin^2 \arctg \frac{e^m - e^{-m}}{2 \sin \gamma}, \quad m = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2}.$$

Steht die Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene, so haben wir  $\gamma = \gamma_1$ , wo:

$$(12) \quad \tg \frac{1}{2} \gamma_1 = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - N^2}}{\cos \alpha}.$$

Ist sie dagegen parallel der Einfallsebene und  $\gamma = \gamma_2$ , wo:

$$(13) \quad \tg \frac{1}{2} \gamma_2 = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - N^2}}{N^2 \cos \alpha},$$

dann ist auch:

$$\sin \gamma_1 = \frac{2 \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2}}{1 - N^2},$$

$$\sin \gamma_2 = \frac{2 N^2 \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - N^2}}{\sin^2 \alpha + N^4 \cos^2 \alpha - N^2}.$$

Setzen wir wieder  $Nn = 1$  und  $n\lambda = L$ , so erhalten wir für die Intensität des zurückgeworfenen Lichtes, wenn die Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene ist:

$$(14) \quad C^2 = \sin^2 \arctg \frac{(n^2 - 1)(e^m - e^{-m})}{4n \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}.$$

Ist dagegen die Schwingungsrichtung der Einfallsebene parallel, so wird sie gleich:

$$(15) \quad D^2 = \sin^2 \arctg \frac{(n^2 - 1)(n^2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(e^m - e^{-m})}{4n \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}.$$

An der Grenze der Totalreflexion wird  $n \sin \alpha = 1$  und  $n \cos \alpha = \sqrt{n^2 - 1}$ . Statt (14) und (15) erhalten wir dann:

$$(16) \quad C^2 = \sin^2 \arctg \frac{\pi a \sqrt{n^2 - 1}}{L},$$

Prismas wurde weggeschliffen, wie in Fig. 5<sub>b</sub>, und es wurden senkrecht zur Hypotenusenfläche drei Löcher gebohrt, die in Fig. 5<sub>a</sub> bei *N*, *O* und *P* angegeben sind. *N* und *P* stehen in Verbindung mit der kreisförmigen Rinne *LM*. Mittelst eingeschlifener Glasröhren konnte ein Luftstrom bei *N* ein- und bei *P* hinausgeleitet werden. Legt man nun die Prismen mit den Hypotenusenflächen gegeneinander, so geht der Luftstrom von *N* zu *P* durch *L* und *M*; wird dann *O* mit der Luftpumpe in Verbindung gesetzt, so strömt die Luft in der durch die Pfeile angedeuteten Richtung. Der Abstand von *LNMP* zum Rande von *O* war 0,96 cm.

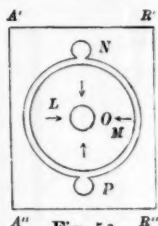


Fig. 5a.



Fig. 5b.

Die vollständige Aufstellung ist in Fig. 6 gezeichnet. Die Glasprismen I und II sind durch Schrauben und Muttern *M* gegeneinander gedrückt. Durch die Glasröhren *n* und *p* wird das zu untersuchende Gas ein- und ausgeleitet, das Rohr *o* steht mittelst einer Kautschukverbindung, die von einem weiteren, mit Glycerin gefüllten Glasrohr umgeben ist, mit dem Druckmesser *B* und der Prytz'schen Pumpe *C* in Verbindung, welche auch bei dem in II beschriebenen Versuche gebraucht wurde. Die Versuche wurden gewöhnlich in der Weise angestellt, dass man zuerst das zu untersuchende Gas hindurchleitete, dann die Pumpe in Wirksamkeit setzte, den Abstand der Hypotenusenflächen durch die in III beschriebenen Methoden bestimmte und dann das in gegebener Zeit hindurchgehende Gasvolumen mass. Zu diesem Zwecke wurden zwei Methoden gebraucht. Entweder wurde das Gas in einem getheilten Glasrohre (einem Eudiometer *D*) angesammelt, oder auch, besonders wenn der Abstand der Prismen sehr klein, die Strömung deshalb sehr langsam war, die Pumpe ausser Wirksamkeit gesetzt, die Zeit gemessen, die zu einer gewissen Druckänderung am Druckmesser *B* nothwendig war.

Ob es gleich meine Absicht war, die Strömung durch möglichst enge Spalten zu untersuchen, habe ich doch auch einige Versuche über die Strömung durch Spalten, deren Weite mehrere Wellenlängen betrug, angestellt. Es findet

Die totale Intensität der zurückgeworfenen Strahlen wird folglich ausgedrückt durch:

$$J_1 = \frac{1}{2} (c^4 C^2 + d^4 D^2) \frac{Q}{l_1^2}.$$

Ebenso erhalten wir für das Licht, das von  $F$  ausgehend durch  $B'A'AB$  gedungen ist und an  $AC$  gebrochen wird, den Ausdruck:

$$J_2 = \frac{1}{2} (c^4 (1 - C^2) + d^4 (1 - D^2)) \frac{Q}{l_2^2}.$$

Wird die Lichtquelle verschoben bis  $F$  und  $G$ , durch die Prismen gesehen, gleich stark beleuchtet erscheinen, so haben wir  $J_1 = J_2$ , woraus folgt, wenn:

$$(18) \quad f = \frac{l_1}{l_2}, \quad \text{dass} \quad f^2 = \frac{c^4 C^2 + d^4 D^2}{c^4 (1 - C^2) + d^4 (1 - D^2)}.$$

Aus den Fresnel'schen Formeln erhalten wir:

$$\frac{d^4}{c^4} = 1,008.$$

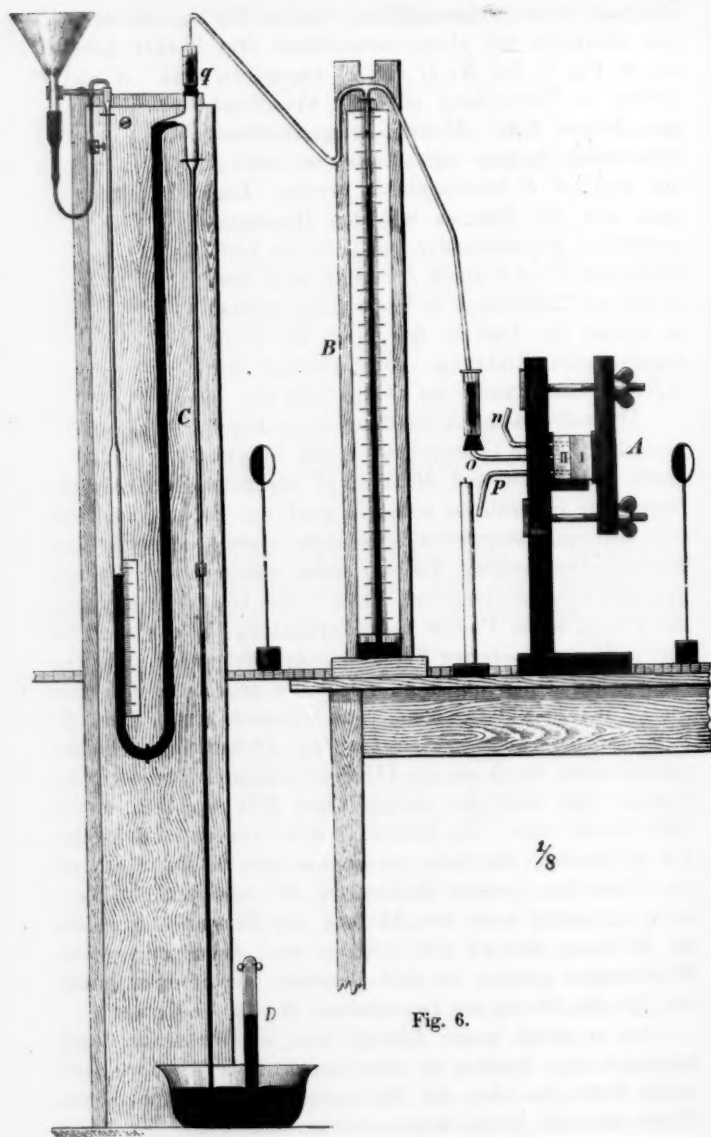
In der folgenden Tabelle findet man die Werthe von  $C^2$ ,  $D^2$  und  $f$  für Natriumlicht, wenn der Abstand  $a$  der Hypotenusenfläche  $\frac{1}{10}$ ,  $\frac{2}{10}$ ,  $\frac{3}{10}$ ,  $\frac{4}{10}$ ,  $\frac{5}{10}$  Wellenlängen betragen:

$$L = 0,0589 \text{ mm.}$$

$a$	$C^2$	$D^2$	$f$	$a$	$C^2$	$D^2$	$f$
$\frac{1}{10} L$	0,128	0,023	0,286	$\frac{6}{10} L$	0,841	0,461	1,363
$\frac{2}{10} L$	0,370	0,087	0,543	$\frac{7}{10} L$	0,878	0,537	1,554
$\frac{3}{10} L$	0,570	0,176	0,770	$\frac{8}{10} L$	0,904	0,603	1,745
$\frac{4}{10} L$	0,702	0,275	0,976	$\frac{9}{10} L$	0,923	0,658	1,940
$\frac{5}{10} L$	0,786	0,372	1,171	$\frac{10}{10} L$	0,936	0,703	2,132

IV. Ich werde nun den Apparat beschreiben, mit welchem die endgültigen Versuche ausgeführt wurden. Den Haupttheil desselben bildeten die obengenannten Glasprismen, von denen das eine, das in Fig. 2 mit  $ABC$  bezeichnet ist, ungeändert gelassen wurde; das andere dagegen wurde in der jetzt zu beschreibenden Weise modificirt. In die Hypotenusenfläche  $A'B'B''A''$  (Fig. 5<sub>a</sub>), die 5 cm lang und 4 cm breit war, wurde eine ringförmige Vertiefung  $LM$  eingedreht, deren innerer Durchmesser 2,9, deren äusserer 3,15 cm betrug. Seine Tiefe war 0,15 cm. Die rectanguläre Kante des





dann eine verhältnissmässig starke Strömung statt, und war es deshalb nothwendig, eine gewöhnliche Geissler'sche Pumpe mit Hinzufügung eines Luftbehälters zu gebrauchen. Das Ganze wurde zuerst fast luftleer gemacht, dann die Verbindung mit der Pumpe losgelöst und endlich die Verminderung des Druckes in *B* gemessen. Derartige Versuche wurden mit Anwendung von drei verschiedenen Abständen *a* der Prismen gemacht.

Zuerst wurden die Prismen durch zwei dünne Streifen von Stanniol voneinander getrennt. Der Abstand *a* wurde aus den Formeln (10) berechnet und gleich 15,9 Wellenlängen für Natriumlicht gefunden. Das Volumen *V* des Luftbehälters und der Leitungen war 1900 cm<sup>3</sup>. Der Barometerstand war 751 mm bei 21,7° C. gemessen. Die Höhe *h* des Quecksilbers im Druckmesser wurde abgelesen sammt den Zeiten  $\Delta t$  zwischen zwei Ablesungen. Die untersuchten Gase sind Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlensäure. Der Sauerstoff wurde aus chloresurem Kali, der Wasserstoff aus reinem Zink und verdünnter Schwefelsäure entwickelt, sie wurden mittelst Schwefelsäure und Chlorcalcium getrocknet. Die Kohlensäure wurde einem Behälter mit flüssiger Kohlensäure entnommen. Die Versuche wurden zwei- oder dreimal wiederholt. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle enthalten:

$$V = 1900 \text{ cm}^3. \quad a = 15,9 \text{ L.}$$

<i>h</i>	$\Delta t$ für			O	O
	O	H	CO <sub>2</sub>	H	CO <sub>2</sub>
700,0	279	118	211	2,36	1,32
609,0	298	124	226	2,40	1,32
517,5	329	139	248,5	2,37	1,32
425,1	380	158	286	2,40	1,33
333,0	464	194	351,5	2,39	1,32
241,9	641	269	487	2,38	1,32
151,1					

Die zwei letzten Rubriken geben die Geschwindigkeit des Wasserstoffs und der Kohlensäure an, wenn die Geschwindigkeit des Sauerstoffs = 1 gesetzt wird. Dieses Verhältniss ist, wie man sieht, unabhängig von der Druckdifferenz *h*. Sein Mittelwerth ist für Wasserstoff 2,38 und für Kohlensäure 1,32. Die Strömung ist somit als eine

Transpiration zu betrachten, denn in diesem Falle ist nach Graham die Geschwindigkeit für Wasserstoff 2,28 und für Kohlensäure 1,38, wenn die des Sauerstoffs 1 ist.

In der nächsten Versuchsreihe wurden einige Stücke Blattgold zwischen die Prismen gelegt. Durch Messung der Streifen ward die Dicke der Luftschicht  $a$  gleich 8,3 Wellenlängen gefunden. Der Barometerstand war 754,1 mm bei 20,1° C., das Volumen des Luftbehälters und der Leitungen war 386 cm<sup>3</sup>.

$$V = 386 \text{ cm}^3. \quad a = 8,3 \text{ L.}$$

$h$	$\Delta t$ für			O	O
	O	H	CO <sub>2</sub>	H	CO <sub>2</sub>
700,0	266,5	112	205,5	2,38	1,30
609,0	288,5	122	221,5	2,36	1,30
517,5	326,5	138,5	252,5	2,36	1,29
425,1	380	162	291,5	2,34	1,30
333,0	474,5	202,5	366,5	2,34	1,29
241,9	661	283	520	2,34	1,27
151,1					

Der Mittelwerth der Geschwindigkeit ist für Wasserstoff 2,35, für Kohlensäure 1,29.

In der dritten Versuchsreihe waren die Prismen nur durch etwas Staub voneinander getrennt. Nur die zwei ersten dunklen Streifen waren zu sehen, sie waren sehr verwaschen und die Bestimmung der Dicke der Luftschicht deshalb sehr unsicher. Ich schätze sie auf 4,3 Wellenlängen. Ich maass nur die Zeit, in der das Quecksilber im Manometer von 700 bis 609 mm sank; sie war für Sauerstoff 314, für Wasserstoff 124 und für Kohlensäure 260 Secunden.  $V$  war 80 cm<sup>3</sup>; der Barometerstand 756 mm bei 20° C. gemessen. Es ergibt sich, dass die Geschwindigkeit des Wasserstoffs 2,53, die der Kohlensäure 1,21 ist, wenn die Geschwindigkeit des Sauerstoffs als die Einheit genommen wird.

Die Hauptresultate der drei Versuchsreihen sind in der folgenden Tabelle enthalten:

$a$	H	CO <sub>2</sub>	$V$
$\infty \text{ L}$	2,28	1,38	
15,9 L	2,38	1,32	1,000
8,3 L	2,35	1,29	0,225
4,3 L	2,53	1,21	0,040

Unter  $\infty L$  ist hier die für die Transpiration durch enge Röhren von Graham gefundene Geschwindigkeit angeführt. Man sieht, dass die Geschwindigkeit mit abnehmender Dicke der Luftschicht für Wasserstoff zunimmt, für Kohlensäure dagegen abnimmt. Die Abweichung von dieser Regel bei  $a = 8,3 L$  ist sehr merkwürdig. Unter  $V$  ist die in gleicher Zeit durchströmende Gasmenge angegeben, wenn sie für  $a = 15,9 L$  der Einheit gleich gesetzt wird. Es lässt sich zeigen, dass sie der dritten Potenz des Plattenabstandes proportional ist, wenn man von der gewöhnlichen Theorie der inneren Reibung der Flüssigkeiten ausgeht; damit stimmen die Versuche indess nicht überein.

Ich gehe nun zu den Versuchen über, bei welchen der Abstand der Hypotenusenflächen sehr klein war. Ich gebrauchte dann gewöhnlich das folgende Verfahren. Zuerst wurde die Pumpe in Wirksamkeit gesetzt, bis das Manometer z. B. 740 mm zeigte. Dann wurde die Pumpe ausser Wirksamkeit gesetzt. Wenn das Manometer dann 730 mm zeigte, wurde die Zeit mittelst eines Secundenschlägers notirt; dasselbe geschah, wenn das Manometer 720 mm zeigte u. s. f. War die Strömung äusserst langsam, so wurde das untere Ende des Fallrohres der Luftpumpe mit einem Glashahn versehen, der, wenn die Pumpe luftleer geworden war, verschlossen wurde. Man konnte dann das Steigrohr völlig mit Quecksilber füllen und die Versuche in der oben angegebenen Weise ausführen. Da nun der ganze Luftraum kleiner geworden war, konnte jeder Versuch in kürzerer Zeit beendet werden.

Ich werde zuerst eine Versuchsreihe mittheilen, in welcher die Lichtquelle  $E$  (Fig. 4) in der Mitte zwischen den Schirmen  $F$  und  $G$  aufgestellt wurde. Die Hypotenusenflächen der Prismen wurden zuerst von Staub gereinigt, dann gegeneinander gedrückt, bis beide Schirme gleich stark leuchtend erschienen. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass das durchgehende Licht röthlich erschien, das zurückgeworfene dagegen eine bläuliche Färbung hatte. Um diesen Uebelstand zu überwinden, wurde eine gelbe Glasplatte vor das Auge gehalten. Im jetzigen Falle haben wir  $f = 1$ , und man findet dann aus der Tabelle p. 578 den Abstand der

Hypotenusenflächen ungefähr gleich 0,42 Wellenlängen. Die Resultate sind in den folgenden Tabellen enthalten:

$$a = 0,42 L. \quad \text{Bar. 758,2.} \quad \text{Therm. } 18,0^{\circ} C.$$

Druck- messer	H			O			H	
	1	2	3	4	5	6	7	8
730	m s 1 4	m s 1 0	m s 1 3	m s 3 38	m s 4 2	m s 3 46	m s 1 6	m s 1 2
725	1 7	1 7	1 6	4 5	3 51	4 3	1 13	1 6
720	1 17	1 15	1 13	4 28	4 26	4 36	1 14	1 13
715	1 24	1 22	1 18	4 56	4 48	5 2	1 24	1 20
710	4 52	4 44	4 40	17 7	17 7	17 27	4 57	4 41

Druck- messer	CO <sub>2</sub>			H			
	9	10	11	12	13	14	15
730	m s 4 12	m s 4 10	m s 4 15	m s 0 57	m s 0 57	m s 1 2	m s 1 1
725	4 29	4 32	4 38	1 2	1 4	1 4	1 5
720	5 4	5 1	4 52	1 8	1 8	1 9	1 9
715	5 45	5 27	5 30	1 17	1 18	1 19	1 17
710	19 30	19 10	19 15	4 24	4 27	4 34	4 32

Es zeigen sich bei diesen Versuchen mehrere auffallende Unregelmässigkeiten; sie sind muthmaasslich durch das stossweise Sinken des Quecksilbers in dem Manometer, welches ziemlich eng war, hervorgebracht worden. Die Mittelwerthe sind:

1 — 3	Wasserstoff	4 <sup>m</sup> 45 <sup>s</sup>	9 — 11	Kohlensäure	19 <sup>m</sup> 18 <sup>s</sup>
4 — 6	Sauerstoff	17 14	12 — 15	Wasserstoff	4 29
7 — 8	Wasserstoff	4 49			

Aus den drei ersten Mittelwerthen folgt, dass die Geschwindigkeit des Wasserstoffs 3,60 mal grösser, als die des Sauerstoffs ist, und aus den drei letzten, dass die Geschwindigkeit des Wasserstoffs 4,15 mal grösser ist, als die der Kohlensäure. Wir haben dann:

$$a = 0,42 L.$$

Sauerstoff 1,00, Wasserstoff 3,60, Kohlensäure 0,87.

In einer folgenden Versuchsreihe war  $f = \frac{2}{3}$  und also  $a = 0,25$  Wellenlängen. Die Zeit wurde gemessen, in der der Druckmesser von 740 mm bis 720 mm sank; sie war für Wasserstoff:

7<sup>m</sup> 51<sup>s</sup>, 8<sup>m</sup> 5<sup>s</sup>, 8<sup>m</sup> 15<sup>s</sup>, 8<sup>m</sup> 0<sup>s</sup>, 8<sup>m</sup> 9<sup>s</sup>, 8<sup>m</sup> 18<sup>s</sup>, 8<sup>m</sup> 15<sup>s</sup>;

Mittel 8<sup>m</sup> 8<sup>s</sup>. Abwechselnd damit wurde bei Anwendung von Sauerstoff gefunden:

31<sup>m</sup> 27<sup>s</sup>, 32<sup>m</sup> 23<sup>s</sup>, 33<sup>m</sup> 4<sup>s</sup>;

Mittel 32<sup>m</sup> 20<sup>s</sup>. Man erhält hieraus, dass die Geschwindigkeit des Wasserstoffs 3,97 mal grösser ist, als die des Sauerstoffs. Der Barometerstand war 760,4 mm bei der Temperatur 18,9° C.

Nun wurden die Prismen gereinigt, dann zusammengelegt. Als der Abstand der Hypotenusenflächen so klein geworden war, dass  $f$  wieder gleich  $\frac{2}{3}$  gefunden wurde, fand ich die Zeit, in welcher das Manometer von 740 mm bis auf 720 mm sank, für Wasserstoff gleich:

9<sup>m</sup> 57<sup>s</sup>, 9<sup>m</sup> 59<sup>s</sup>, 9<sup>m</sup> 52<sup>s</sup>, 9<sup>m</sup> 47<sup>s</sup>;

im Mittel 9<sup>m</sup> 54<sup>s</sup>. Abwechselnd damit wurde für Kohlensäure gefunden:

46<sup>m</sup> 47<sup>s</sup>, 46<sup>m</sup> 50<sup>s</sup>;

Mittel 46<sup>m</sup> 48,5<sup>s</sup>. Die Geschwindigkeit des Wasserstoffs ist folglich 4,73 mal grösser, als die der Kohlensäure. Wir haben also:

$$\alpha = 0,25 L.$$

Sauerstoff 1,00, Wasserstoff 3,97, Kohlensäure 0,84.

Dies zeigt deutlich, dass schon, wenn die Dicke der Luftschicht  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge ist, die Strömungsgeschwindigkeit ihren theoretischen Werth 4 erlangt hat. Wird die Luftschicht noch dünner, so bleibt das Verhältniss der Geschwindigkeiten wesentlich ungeändert. Bei zwei Versuchsreihen wurde gefunden:

	$\alpha = 0,18 L$	$\alpha = 0,12 L$
Sauerstoff . . . . .	1,00	1,00
Wasserstoff . . . . .	3,91	3,92

Dass die Resultate etwas von dem von der Theorie geforderten Werthe abweichen, hat wahrscheinlich seine Ursache darin, dass der Wasserstoff nicht ganz rein war.

Das specifische Gewicht der Kohlensäure ist 1,375, wenn das des Sauerstoffs 1,000 ist. Nun ist:

$$\sqrt{\frac{1}{1,375}} = 0,853,$$

und Kohlensäure sollte also 0,853 mal langsamer strömen als Sauerstoff. Damit stimmt schon die oben für  $\alpha = 0,25 L$  gefundene Geschwindigkeit sehr gut. Zwei spätere Versuchsreihen gaben für  $\alpha = 0,18 L$

das eine Mal	0,79	} Mittel 0,82
„ andere „	0,85	

für das Verhältniss zwischen den Geschwindigkeiten von Kohlensäure und Sauerstoff.

Auch über die Strömung bei grösserer Dicke der Luftschicht habe ich einige Versuche angestellt. Ich maass dabei die Zeit, in welcher das Manometer von 725 mm bis 705 mm sank. Es war  $f = 2$ , und also  $a = 0,93$  Wellenlängen. Es wurde gefunden:

Sauerstoff	8 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup>	8 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup>	Mittel	8 <sup>m</sup> 43 <sup>s</sup>
Wasserstoff	2 46	2 45	"	2 45,5
Kohlensäure	8 42	8 49	"	8 45,5

Hieraus ergibt sich:

$$a = 0,93 L.$$

Sauerstoff 1,00, Wasserstoff 3,16, Kohlensäure 1,00.

Der Barometerstand war 752,2 bei der Temperatur 20,0° C.

In der folgenden Tabelle habe ich alle gefundenen Resultate zusammengestellt:

Sauerstoff = 1,00.

$a$	Wasserstoff	Kohlensäure	$a$	Wasserstoff	Kohlensäure
$\infty$	2,28	1,98	0,42	3,60	0,87
15,9	2,88	1,32	0,25	3,97	0,84
8,3	2,35	1,29	0,18	3,91	0,82
4,3	2,53	1,21	0,12	3,92	—
0,93	3,16	1,00			

Es geht also aus den Versuchen hervor, dass man schon eine Abweichung von den Gesetzen der Transpiration bemerken kann, wenn die Weite der Oeffnungen, durch welche die Strömung stattfindet, 16 Wellenlängen für Natriumlicht, oder ungefähr 0,01 mm, ist. Ist die Weite gleich  $\frac{1}{4}$  Wellenlänge oder ungefähr 0,015 mm, so ist die Strömung mit der Diffusion durch Graphit oder Hydrophan zu vergleichen.

Je dünner die Luftschicht wird, in welcher die Strömung stattfindet, je weniger Luft geht hindurch; es schien mir nun wahrscheinlich zu sein, dass das hindurchgehende Luftvolumen bei sehr kleiner Dicke zuletzt der Dicke selbst proportional werden müsste. Ich habe deshalb einige Versuche mit Wasserstoff angestellt, bei welchen  $a$  verschiedene Werthe hatte.

Zuerst wurde die Dicke der Schicht  $a$  gleich 0,42  $L$  gemacht. Zu einer Druckänderung von 730 zu 710 mm war



dann 3<sup>m</sup> 33<sup>s</sup> nothwendig. Nun wurde  $a = 0,18 L$  gemacht; die Zeit wurde dann gleich 12<sup>m</sup> 8<sup>s</sup> gefunden. Wurde nun  $a$  wieder gleich 0,42  $L$  gemacht, so fand ich 4<sup>m</sup> 0<sup>s</sup>. Zwei andere Versuche gaben für  $a = 0,18 L$  12<sup>m</sup> 10<sup>s</sup> und für  $a = 0,42 L$  3<sup>m</sup> 48,5<sup>s</sup>. Die Resultate sind im Mittel:

$a = 0,42$	3 <sup>m</sup> 47 <sup>s</sup>
$a = 0,18$	12    9

Eine zweite Versuchsreihe gab die folgenden Resultate:

$a = 0,93$	2 <sup>m</sup> 53 <sup>s</sup>	3 <sup>m</sup> 3 <sup>s</sup>	Mittel	2 <sup>m</sup> 56 <sup>s</sup>
$a = 0,42$	8    44	8    58	„	8    51

Aus diesen Versuchen geht hervor, dass die Proportionalität zwischen der Dicke und dem durchströmenden Luftvolumen noch nicht eingetreten ist; doch scheint es nicht unmöglich, dass sie wirklich bei äusserst kleinen Werthen von  $a$  stattfindet.

Zweimal habe ich die Menge von Wasserstoff gemessen, die zwischen den Hypotenusenflächen hindurchströmte, wenn  $a$  gleich 0,22  $L$  war. Das eine Mal wurde in einer Stunde 1,05 cm<sup>3</sup> angesammelt; die Druckdifferenz war 759,7 mm. Der Barometerstand 764,8 mm, beide bei 21,9° C. gemessen. Man kann annehmen, dass das Luftvolumen 1,06 cm<sup>3</sup> gewesen wäre bei einem Barometerstand und einer Druckdifferenz von 760 mm. Der Versuch wurde einen Monat später wiederholt und gab 1,04 cm<sup>3</sup>.

Das Verhalten gemischter Gase wird in einer folgenden Mittheilung behandelt werden. Ich bemerke nur, dass die Geschwindigkeit viel kleiner ist, als sie sein sollte, wenn jeder Bestandtheil ungehindert von Seite der anderen hindurchging; dass Atmolyse stattfindet, ist schon im zweiten Abschnitt gezeigt. Ein einzelnes Beispiel mag angeführt werden. Die ursprüngliche Mischung enthielt 50,8 Proc. Wasserstoff und 49,2 Proc. Sauerstoff; bei einer Dicke  $a$  gleich 0,42  $L$  wurde dann gefunden, dass die durchgeströmte Mischung 67 Proc. Wasserstoff und 33 Proc. Sauerstoff enthielt.

Schliesslich bemerke ich, dass viele von den Versuchen von Hrn. Assistenten A. Runöfsson gemacht worden sind.

Kopenhagen, August 1890.

## XV. Ueber das Dalton'sche Gesetz; von B. Galitzine.

### Einleitung,

Das sogenannte Dalton'sche Gesetz sagt bekanntlich aus: „In einer Mischung verschiedener, chemisch nicht aufeinander wirkender Gase setzt sich der gesammte von der Mischung auf die Gefässwände ausgeübte Druck aus der Summe der Partialdrucke jedes einzelnen Bestandtheiles zusammen.“ Auf gesättigte Dämpfe übertragen, lautet dies Gesetz wie folgt: „Die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem mit Gas erfüllten Raum ist gleich derjenigen im Vacuum.“

Um dieses Gesetz zu prüfen, ist eine ganze Reihe von verschiedenen Versuchen angestellt worden; jedoch die Frage nach der Anwendbarkeit des Dalton'schen Gesetzes und den Grenzen, innerhalb derer seine Richtigkeit als erwiesen angenommen werden darf, ist noch lange nicht endgültig entschieden. Deshalb habe ich diese Frage wieder aufgenommen und einige weiter unten zu besprechende Versuche angestellt, welche mir nachher Veranlassung zu einigen theoretischen Betrachtungen boten. Demgemäss zerfällt meine Arbeit in drei Haupttheile:

- I. Besprechung früherer Arbeiten und Untersuchungen;
- II. Experimentelle Untersuchungen;
- III. Theoretische Untersuchungen.

Vor allen Dingen möchte ich jedoch an dieser Stelle Hrn. Prof. Dr. F. Kohlrausch und Hrn. Dr. Wiener für ihre freundliche Unterstützung meinen besten Dank aussprechen.

## I. Theil.

## Besprechung früherer Arbeiten und Untersuchungen.

## Das Dalton'sche Gesetz.

Die ersten Beobachtungen rühren von Dalton<sup>1)</sup> selbst her, und sind später von Henry<sup>2)</sup> erweitert worden.

Die Resultate derselben lassen sich in der folgenden, ebenfalls von Dalton herrührenden Hypothese zusammenfassen, nämlich dass verschiedenartige Gasmoleculë einander weder abstossen noch anziehen. Auch Henry<sup>3)</sup> spricht sich dahin aus, dass jedes Gas für jedes andere so gut als ein Vacuum sei. Diese Hypothese ist häufig ganz falsch aufgefasst worden, indem man daraus den Schluss zog, dass verschiedenartige Gase keinerlei Druck aufeinander ausübten. Diese Annahme ist offenbar ganz und gar unzulässig.<sup>4)</sup>

Nach Dalton und Henry hat Gay-Lussac<sup>5)</sup> die Richtigkeit des Dalton'schen Gesetzes nachzuweisen geglaubt.

Später wurde derselbe Gegenstand von Magnus<sup>6)</sup> und besonders ausführlich von Regnault<sup>7)</sup> behandelt.

Regnault<sup>8)</sup> untersuchte die Compressibilität von Mischungen verschiedenartiger Gase, um zu bestimmen, ob dieselbe sich aus der bekannten Zusammensetzung der Mischung und ebenfalls bekannten Compressibilität jedes einzelnen Bestandtheiles der Dalton'schen Theorie gemäss berechnen liesse.

Es ergab sich hierbei kein einfaches Resultat; die Be-

1) Dalton, Manch. Phil. soc. 5. p. 535. 1802; Gilbert's Ann. 12. p. 385. 1803; auch 15. p. 21. 1803.

2) Henry, Nicholson's Journ. 8. p. 297. 1804; Gilbert's Ann. 21. p. 393. 1805.

3) Henry, Gilbert's Ann. 21. p. 394. 1805; Nicholson's Journ. 8. p. 297. 1804.

4) Man sehe: O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877. p. 30. Lamont, Pogg. Ann. 118. p. 168. 1863. O. E. Meyer u. Springmühl, Pogg. Ann. 145. p. 540. 1873.

5) Gay-Lussac, Ann. de chim. et de phys. 95. p. 314. 1815; auch Biot, Traité de phys. 1. p. 298, wo die Beobachtungen Gay-Lussac's zum ersten mal beschrieben werden.

6) Magnus, Pogg. Ann. 38. p. 488. 1836.

7) Regnault, Mém. de l'Acad. des scienc. 26. p. 722 u. 729. 1862.

8) Regnault, Mém. de l'Acad. des scienc. 26. p. 256. 1862.

obachtungen zeigen nur, dass für dieselbe Druckänderung — der angewandte Druck überstieg kaum 2 Atmosphären — die Compressibilität einer solchen Mischung jedenfalls zwischen denjenigen der Bestandtheile liegt.

Ausser diesen Beobachtungen hat Regnault auch das Verhalten von gesättigten Dämpfen in mit Gas erfüllten Räumen sorgfältig untersucht. Bei seinen ersten Versuchen<sup>1)</sup> über die Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes in Luft und Stickstoff für Temperaturen zwischen 0 und 40° C. fand er, dass die Spannkraft des Wasserdampfes in einem Gase stets etwas kleiner blieb, als im Vacuum; da aber der Unterschied nur sehr klein war, fast immer kleiner als  $\frac{1}{50}$  der totalen Spannkraft, so glaubte Regnault diese Differenz einem constanten Fehler seiner Beobachtungsmethode zuschreiben und die Richtigkeit des Dalton'schen Gesetzes wenigstens innerhalb jener Grenzen anerkennen zu müssen.

Bei seinen späteren Versuchen<sup>2)</sup> mit flüchtigeren Flüssigkeiten, wie Aethyläther, Schwefelkohlenstoff, Benzol fand Regnault zuweilen (hauptsächlich bei Aethyläther), schon ganz beträchtliche Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz.

Die Spannkraft im Vacuum war stets grösser als in Luft. Der maximale Werth dieses Unterschiedes, welchen wir mit  $\Delta$  bezeichnen wollen, fand sich mit 36,2 mm für Aethyläther bei 29,3° C., was schon 5,8 Proc. der Spannkraft im Vacuum ausmachen würde. Der Druck der trockenen Luft bei 0° war dabei gleich 707 mm.

Der Gang der Zahlen  $\Delta$  mit der Temperatur war ein ziemlich unregelmässiger, ausserdem änderte sich die Spannkraft in Luft bei genau derselben Temperatur auch mit der Zeit.

Obleich die Spannkraft in Luft also stets kleiner als im Vacuum ausfiel, hat jedoch Regnault aus seinen Beobachtungen den Schluss gezogen, dass das Dalton'sche Gesetz ein theoretisches Gesetz sei, welches in Wirklichkeit deshalb keine vollständige Bestätigung findet, weil die Gefässwände des mit der zu untersuchenden Flüssigkeit ge-

1) Regnault, Ann. de chim. et de phys. (3) 15. p. 129. 1845.

2) Regnault, Mém. de l'Acad. des scienc. 26. p. 679. 1862.

füllten Apparates auf die Spannkraft desselben störend einwirken und zwar in folgender Weise. Wenn man eine Flüssigkeit in einem mit Luft erfüllten Glasgefäß bis zu einer gewissen constant bleibenden Temperatur erwärmt, so sendet dieselbe Dampf aus, dessen Spannkraft diejenige im Vacuum zu erreichen strebt. Nun aber wird dem Dampfraum wegen der hygroskopischen Affinität des Glases ein Theil des Dampfes entzogen und an den Gefäßwänden condensirt. Die so durch Condensation entstandene Flüssigkeitsschicht kann sich nur bis zu einer gewissen Dicke vermehren. Hat sie deren Grenzwertb überschritten, so werden die Flüssigkeitstheilchen durch die Wirkung der Schwere an den Wänden entlang nach unten fließen und sich wieder mit der ursprünglichen Flüssigkeit vereinigen. Könnten die dem Dampfraum entzogenen Theilchen sofort durch neue ersetzt werden, wie dies z. B. bei der Verdampfung im Vacuum der Fall ist, so würde nach Regnault der Druck des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gas keine Erniedrigung erfahren. In Wirklichkeit hindert aber das Vorhandensein eines Gases die rasche Verdampfung der Flüssigkeit, und es dauert immer eine gewisse Zeit, bis die Dampftheilchen durch das vorhandene Gas hindurch bis zu den obersten Schichten des Dampfraumes durchdiffundirt sind, sodass z. B. die in der Zeiteinheit verdampfte Flüssigkeitsmenge schon nicht mehr ausreicht, um die an den Gefäßwänden condensirte vollständig zu ersetzen. Da aber die Anzahl der in der Volumeneinheit vorhandenen Theilchen in dieser Weise kleiner wird, so muss auch die Spannkraft des Dampfes einer Flüssigkeit im Gase etwas kleiner ausfallen. Diese Verringerung des Dampfdruckes dauert fort bis zu demjenigen Moment, wo die in der Zeiteinheit condensirte Flüssigkeitsmenge der von neuem verdampften völlig gleich ist.

Diese Auffassung Regnault's scheint mir etwas bedenklich, da die beobachteten Abweichungen vom Dalton'schen Gesetze durchaus nicht unbedeutend sind. Dass diese Abweichungen auf eine etwaige Einwirkung der Gefäßwände zurückgeführt werden können, wird auch von Wüllner auf Grund seiner theils mit Grotrian<sup>1)</sup>, theils mit Velten

1) Grotrian, Wied. Ann. 11. p. 545. 1880.

ausgeführten Versuche, sowie auch derjenigen von Herwig<sup>1)</sup> bezweifelt, denn es ergab sich daraus, dass wenigstens bei reinen Dämpfen die Adhäsion des Dampfes an den Wänden keine merkbliche Wirkung ausüben dürfte.

Nun hat aber Wüllner auch bei reinen Dämpfen ganz besondere Anomalien beobachten können. Wurde das Volumen eines luftfreien Gefäßes, welches mit einer Flüssigkeit, resp. ihren gesättigten Dämpfen gefüllt war, verkleinert, so konnte man die Spannkraft des Dampfes in demselben über die normale Spannkraft im Vacuum bringen.

Diese und andere von Wüllner beobachtete<sup>2)</sup> Anomalien scheinen ihren Grund in dem Verhalten der gesättigten Dämpfe selbst zu haben und nicht von secundären Wirkungen abzuhängen. Die Sache verhält sich so, als ob die sogenannte Spannkraft des gesättigten Dampfes, d. h. die Spannkraft bei Ueberschuss von Flüssigkeit, keine eigentliche Constante wäre, sondern zwischen gewissen Grenzen schwanken könnte. Dieses merkwürdige Resultat sprechen Wüllner und Grottrian in den Worten aus<sup>3)</sup>: „Bis jetzt können wir uns des Schlusses nicht erwehren, dass eine constante Maximalspannung der Dämpfe in dem bisher angenommenen Sinne nicht existirt.“

Aehnliche Anomalien sind auch mehrfalls von anderen Experimentatoren, wie Donny<sup>4)</sup>, Dufour<sup>5)</sup>, Krebs<sup>6)</sup>, Coulier<sup>7)</sup>, Aitken<sup>8)</sup> und Kiessling<sup>9)</sup> Blümcke<sup>10)</sup>, Ramsay und Young<sup>11)</sup>, Guglielmo und Musina<sup>12)</sup> beobachtet worden.

1) Herwig, Pogg. Ann. 137. p. 592. 1869; auch Wüllner, Lehrb. d. Exp.-Phys. 3. 4. Aufl. p. 704.

2) Wüllner, Lehrbuch der Exp.-Physik. 4. Aufl. 3. p. 704, 705, 706. 760—763.

3) Wüllner u. Grottrian, Wied. Ann. 11. p. 604. 1880.

4) Donny, Ann. de chim. et de phys. 16. p. 167. 1846.

5) Dufour, Pogg. Ann. 124. p. 295. 1865.

6) Krebs, Pogg. Ann. 133. p. 673. 1868; 136. p. 144. 1869.

7) Coulier, Journ. de pharm. et de chim. (4) 22. p. 165. 1875.

8) Aitken, Nature. 23. p. 195. 384. 1881.

9) Kiessling, Abh. des naturw. Ver. Hamburg-Altona III. Abth. 1884; siehe auch R. v. Helmholtz, Wied. Ann. 27. p. 508. 1886.

10) Blümcke, Wied. Ann. 36. p. 911. 1889.

11) Ramsay u. Young, Zeitschr. f. phys. Chem. 3. p. 63. 1889.

12) Guglielmo u. Musina, Riv. scient.-industr. di Firenze. Anno 1887. 19. N. 16—17. p. 186.

Aus theoretischen Gründen kann man ebenfalls bei Zugrundelegung der Van der Waals'schen<sup>1)</sup> oder Clausius'schen<sup>2)</sup> Zustandsgleichung die Möglichkeit solcher Erscheinungen übersehen.

Beim Vorhandensein eines indifferenten Gases im Dampf-raum kann man wohl denken, dass diese Anomalien in noch stärkerem Grade auftreten können.

Aber obgleich naturgemässe Anomalien in dem Verhalten der gesättigten Dämpfe, sowie auch die störende Wirkung der Gefässwände zu den Abweichungen und Unregelmässigkeiten der Beobachtungsergebnisse Regnault's beigetragen haben können, kann ich mich doch der Schlussfolgerung Regnault's, dass nämlich das Dalton'sche Gesetz ein theoretisch strenges sei, nicht anschliessen, denn die Abweichungen sind zu gross, um auf secundäre Ursachen zurückgeführt werden zu können.

Die Beobachtungen Regnault's sind in einem verhältnissmässig sehr geringen Temperaturintervall ausgeführt. Da es von grossem Interesse war, dieselben bei viel höheren Temperaturen und Drucken fortzusetzen, um eine klarere Einsicht in diese complicirten Erscheinungen gewinnen zu können, so habe ich dieser Erweiterung von Regnault's Beobachtungen einen Theil meiner eigenen experimentellen Untersuchungen gewidmet.

Ausser Regnault wurde derselbe Gegenstand von Krönig<sup>3)</sup>, Troost und Hautefeuille<sup>4)</sup> behandelt. Sie gelangten dabei zu dem Resultate, dass die Dalton'sche Partialdrucktheorie der Wirklichkeit nicht vollständig entspricht.

Die wichtigsten auf diesem Gebiete ausgeführten Untersuchungen verdanken wir Andrews. So erkannte Andrews<sup>5)</sup>, dass für sehr stark comprimirt Gase das Dalton'sche Gesetz ganz und gar unrichtig sei. Zum Beweis führt Andrews

1) Van der Waals, Ueber die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Leipzig 1881.

2) Clausius, Wied. Ann. 9. p. 337. 1880.

3) Krönig, Pogg. Ann. 123. p. 299. 1864.

4) Troost u. Hautefeuille, Compt. rend. 83. p. 333. 975. 1876.

5) Andrews, Proc. Roy. Soc. 23. p. 581. 1875; Phil. Mag. (5) 1. p. 78. 1876.

Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XLI.



folgendes Zahlenbeispiel an: Bei einer Temperatur von  $7,6^{\circ}\text{C}$ . wird reine Kohlensäure unter einem Druck von ungefähr 42,5 Atmosphären flüssig, während man ein Gemisch von 3 Vol. Kohlensäure mit 4 Vol. Stickstoff bei derselben Temperatur einem Druck von 283,9 Atmosphären aussetzen kann, ohne dass die Kohlensäure sich als Flüssigkeit niederschlägt, obwohl das Volumen hierbei auf den 378. Theil reducirt wird. Andrews meint sogar, dass kein Druck ausreichen würde, das Gemisch zu verflüssigen, so lange die Temperatur nicht auf  $-20^{\circ}\text{C}$ . gebracht wird. Es bedarf nur eines Zusatzes des zehnten Theiles Luft oder Stickstoff zu Kohlensäure, um ihre kritische Temperatur um mehrere Grade zu erniedrigen.

Vor kurzem nach dem Tode des Verfassers ist ein sehr reiches Zahlenmaterial über die Compressibilität einer Mischung von 3 Vol. Kohlensäure mit 4 Vol. Stickstoff bei verschiedenen Temperaturen veröffentlicht worden.<sup>1)</sup> Andrews selber hat eigentlich aus seinen Beobachtungen wenige Schlüsse gezogen, obgleich dieselben unbedingt eingehende Verarbeitung und Besprechung verdienen. Zunächst untersuchte er die Zusammendrückbarkeit des erwähnten Gemisches bei einer Temperatur von  $2,2^{\circ}$ , nachher bei  $7,5$ ,  $31,3$  und  $48,4^{\circ}\text{C}$ . unter Anwendung von sehr hohem Druck; das Maximum desselben betrug 283,90 Atmosphären.<sup>2)</sup> In keinem Falle konnte Andrews trotz dieses hohen Druckes die Bildung von flüssiger Kohlensäure wahrnehmen, obgleich bei der ersten Beobachtungsreihe (bei  $2,2^{\circ}$ ) die Temperatur um  $29^{\circ}$  unter der kritischen Temperatur der Kohlensäure stand. Um auch das Verhalten dieses Gemisches zum Dalton'schen Gesetz zu bestimmen, verfuhr Andrews auf folgende Weise: Er berechnete nach dem Boyle-Mariotte'schen Gesetz den Partialdruck des Stickstoffs und untersuchte alsdann die Abhängigkeit des Druckes der im Gemisch befindlichen Kohlensäure vom Volumen. Die auf diesem Wege gewonnenen Curven wichen von denjenigen für reine Kohlensäure in beträchtlicher Weise ab, woraus Andrews den Schluss zog,

1) Andrews, Phil. Trans. 178 A. p. 45. 1887.

2) Das ist die unreducirte Angabe eines Wasserstoffmanometers. Der wirkliche Druck ist gleich 356,9 Atmosphären.

dass das Dalton'sche Gesetz für stark comprimirte Gasgemische als unrichtig anzusehen sei. Aus dem Umstande, dass in keinem der vorliegenden Fälle bei so starken Compressionen sich Flüssigkeit gebildet hat, folgt, dass dieser Zusatz von Stickstoff zu Kohlensäure die kritische Temperatur der letzteren in ganz beträchtlicher Weise erniedrigt.

Um in dieser letzten Frage etwas Klarheit zu schaffen, zog Andrews noch andere Mischungen in den Kreis seiner Untersuchungen. — Für eine Mischung von 3,43 Vol. Kohlensäure mit 1 Vol. Stickstoff bestimmte Andrews die kritische Temperatur zu  $14^{\circ}$ , während die der reinen Kohlensäure nach Andrews  $= 30,9^{\circ}$  ist.

Obgleich Andrews die Unzulässigkeit des Dalton'schen Gesetzes für stark comprimirte Gase erkannte, und dieses Resultat in voller Schärfe aussprach, hat er doch die Grösse der Abweichungen von demselben nicht näher angegeben; deshalb habe ich <sup>1)</sup> diese Rechnungen selber ausgeführt und die Resultate derselben in den gleich mitzutheilenden Tabellen zusammengestellt.

Was die Behandlung der Zahlenangaben Andrews' betrifft, so ist zunächst zu bemerken, dass derselbe die verschiedenen Drucke des Gemisches an einem Wasserstoffmanometer maass; um dessen Angaben in Atmosphären auszudrücken, habe ich mich der Clausius'schen Zustandsgleichung bedient unter Benutzung der von Sarrau für Wasserstoff berechneten Constanten.<sup>2)</sup> Die Partialdrucke der Kohlensäure und des Stickstoffs sind ebenfalls nach der Clausius'schen Zustandsgleichung ausgerechnet, indem ich dabei für Stickstoff die Sarrau'schen<sup>3)</sup>, für Kohlensäure dagegen die ganz neulich von Blümcke <sup>4)</sup> berechneten Constanten benutzte, da letztere mir am zuverlässigsten schienen. Bei Vergleichung der Summe dieser Partialdrucke mit dem von Andrews direct beobachteten Druck des Gemisches ergibt die Differenz beider Zahlen die Grösse der Abweichung vom Dalton'schen Gesetz.

1) B. Galitzine, Inauguraldissertation. Strassburg 1890. p. 23.

2) Sarrau, Compt. rend. 94. p. 847. 1882.

3) Sarrau, l. c.

4) Blümcke, Beibl. 12. p. 458. 1888.

Die Clausius'sche Zustandsgleichung lautet bekanntlich wie folgt<sup>1)</sup>:

$$\left[ p + \frac{a}{T(v + \beta)^2} \right] (v - b) = R \cdot T$$

worin  $p$  den Druck,  $v$  das Volumen und  $T$  die absolute Temperatur bezeichnen;  $a$ ,  $\beta$ ,  $b$  und  $R$  sind constante Grössen, deren Werthe für die drei erwähnten Gase hier zusammengestellt werden mögen:

	$a$	$\beta$	$b$	$R$	
Wasserstoff	0,0551	-0,0,430	0,000 887	0,003 663	(Sarrau)
Stickstoff	0,4464	0,0,263	0,001 359	0,003 663	(Sarrau)
Kohlensäure	2,0935	0,0,977	0,000 843	0,003 688	(Blümcke).

Bei diesen Werthen der Constanten ist als Druckeinheit der Druck einer Atmosphäre angenommen, als Volumeneinheit dasjenige Volumen, welches das betreffende Gas bei 0° und unter dem Drucke einer Atmosphäre einnehmen würde. In den folgenden Tabellen bedeuten:

$p_w$  die nach dem Boyle-Mariotte'schen Gesetz berechnete Angabe eines Wasserstoffmanometers,

$p_g$  den nach der Clausius'schen Formel corrigirten Gesamtdruck des Gemisches,

$t$  die Temperatur des Gasgemisches in Celsiusgraden ausgedrückt,

$v$  das vom Gemisch eingenommene Volumen<sup>2)</sup>,

$p_1$  den Partialdruck des Stickstoffs } nach dem Dalton'schen Gesetz ber.,

$p_2$  den Partialdruck der Kohlensäure }

$p$  die Summe beider ( $= p_1 + p_2$ ),

$\Delta$  die Grösse der Abweichung vom Dalton'schen Gesetz ( $= p - p_g$ ).

Alle Drucke sind in Atmosphären ausgedrückt.

1) Clausius, Wied. Ann. 9. p. 337. 1880.

2) Wobei als Volumeneinheit das Volumen des Gemisches bei 0° und unter dem Druck einer Atmosphäre angenommen ist.

Zusammendrückbarkeit eines Gemisches  
von 3 Vol. CO<sub>2</sub> und 4 Vol. N<sub>2</sub>.

Erste Beobachtungsreihe. Temp. 2,2° C.

$P_w$	$P_g$	$t$	$v$	$P_1$	$P_2$	$p$	$\Delta$
42,05	43,30	2,32°	0,02138	26,83	17,76	44,59	+1,29
48,68	50,36	2,34	1805	31,76	20,51	52,27	1,91
51,64	53,52	2,08	1681	34,07	21,72	55,79	2,27
54,73	56,85	2,38	1575	36,40	22,94	59,34	2,49
58,43	60,85	2,06	1455	39,35	24,40	63,75	2,90
62,63	65,42	2,10	1338	42,80	26,06	68,86	3,44
67,20	70,43	2,16	1229	46,60	27,81	74,41	3,98
79,47	84,03	2,21	0998	57,43	32,30	89,73	5,70
87,73	93,33	2,21	881	65,11	35,09	100,2	6,9
97,21	104,2	2,17	772	74,40	38,00	112,4	8,2
108,6	117,4	2,21	668	86,23	41,11	127,3	9,9
123,4	134,9	2,25	568	101,9	44,24	146,1	11,2

Zweite Beobachtungsreihe. Temp. 7,5° C.

$P_w$	$P_g$	$t$	$v$	$P_1$	$P_2$	$p$	$\Delta$
39,68	40,79	7,50°	0,02350	24,91	16,76	41,67	+0,88
41,56	42,78	7,50	2231	26,24	17,55	43,79	1,01
43,66	44,99	7,50	2109	27,75	18,43	46,18	1,19
46,00	47,49	7,53	1987	29,45	19,40	48,85	1,36
51,48	53,36	7,51	1744	33,56	21,66	55,22	1,86
54,75	56,88	7,59	1625	36,03	22,98	59,01	2,13
58,24	60,68	7,50	1512	38,70	24,36	63,06	2,38
62,46	65,25	7,50	1391	42,07	26,04	68,11	2,86
67,07	70,30	7,50	1274	45,95	27,89	73,84	3,54
73,00	76,88	7,50	1149	50,96	30,17	81,13	4,25
79,22	83,84	7,51	1054	55,59	32,15	87,74	3,90?
87,20	92,80	7,50	0926	63,34	35,19	98,53	5,73

**Bemerkung.** Erst nachdem diese Rechnungen zum grössten Theil ausgeführt waren, habe ich von der neuen Mittheilung von Margules an die Wiener Academie vom 6. Juni 1889 Kenntniss nehmen können. Die Rechnungen von Margules sind den meinen vollständig analog; da sie aber etwas anders ausgeführt sind, theile ich meine eigenen Rechnungen hier mit. Die von Margules und mir berechneten Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz haben denselben Gang.

Obgleich in dieser und der folgenden Tabelle die reine Kohlensäure bei den letzten Drucken schon theilweise flüssig sein musste, gebe ich doch ihren Partialdruck, wie er sich nach der Clausius'schen Zustandsgleichung berechnet, immer noch an.

Die Zahlen der elften Zeile der zweiten Tabelle sind wenig zuverlässig, da, wie schon Margules (Wien. Ber. 98 Juni 1889) hervor gehoben hat, bei Andrews vermuthlich ein Schreibfehler vorliegt (79,22 statt 78,22).

## Zweite Beobachtungsreihe. (Fortsetzung.)

$p_w$	$p_g$	$t$	$v$	$p_1$	$p_2$	$p$	$\Delta$
96,50	103,5	7,08°	0,00808	72,59	38,34	110,9	+ 7,4
108,7	117,6	7,48	691	85,30	42,17	127,5	9,9
144,0	160,1	7,54	495	120,7	49,08	169,8	9,7
166,4	188,6	7,50	422	143,3	51,19	194,5	5,9
173,4	197,5	7,49	404	150,3	51,56	201,9	4,4
215,7	254,8	7,50	332	187,7	51,78	239,5	-15,3
283,9	356,9	7,49	272	239,0	48,80	287,8	-69,1

## Dritte Beobachtungsreihe. Temp. 31,3° C.

$p_w$	$p_g$	$t$	$v$	$p_1$	$p_2$	$p$	$\Delta$
42,26	43,51	31,35°	0,02445	26,12	17,93	44,05	+ 0,54
49,43	51,21	31,31	2055	31,09	20,95	52,04	0,83
55,82	58,07	31,21	1795	35,62	23,59	59,21	1,14
63,87	66,96	31,40	1542	41,53	26,91	68,44	1,48
72,34	76,30	31,14	1337	47,93	30,30	78,23	1,93
89,26	95,33	31,06	1045	61,52	36,93	98,45	3,12
110,0	119,1	31,36	816	79,35	44,51	123,9	4,8
145,6	161,9	31,35	586	112,1	55,43	167,5	5,6
221,7	262,8	31,30	377	181,6	69,07	250,7	-12,1

## Vierte Beobachtungsreihe. Temp. 48,4° C.

$p_w$	$p_g$	$t$	$v$	$p_1$	$p_2$	$p$	$\Delta$
41,90	43,13	48,22°	0,02635	25,64	17,87	43,51	+ 0,38
48,80	50,48	48,11	2239	30,21	20,74	50,95	+ 0,47
55,86	58,85	48,48	1929	35,15	23,76	58,91	+ 0,06
64,18	68,03	48,43	1662	40,86	27,13	67,99	- 0,04
72,54	77,39	48,66	1448	47,01	30,62	77,63	+ 0,24
110,5	121,4	48,38	0896	76,74	45,47	122,2	+ 0,8
147,1	166,3	48,49	646	108,0	58,04	166,0	- 0,3
223,6	269,8	48,47	430	168,1	75,29	243,4	-26,4

Diese Tabellen zeigen, dass im allgemeinen die Summe der Partialdrucke beider Gase grösser als der wirklich beobachtete Druck ausfällt, wobei der Unterschied bei niedriger Temperatur ganz bedeutende Werthe annehmen kann. Ausserdem stellt sich das merkwürdige Resultat heraus, dass bei fortgesetzter Compression die Abweichungen  $\Delta$  anfangs zunehmen, ein Maximum erreichen, dann wieder abnehmen, durch Null hindurch ins Negative übergehen, ja sogar sehr bald grosse, negative Werthe erreichen. Obgleich die absoluten Werthe von  $\Delta$  bei so kleinen Volumina  $v$  etwas fehler-

haft sein können, da die Manometerangaben schon ganz beträchtliche Correctionen erfordern<sup>1)</sup>, beeinflusst das doch den Gang der Zahlen  $\Delta$  wahrscheinlich nicht wesentlich. Bei einem bestimmten kleinen Volumen wird  $\Delta = 0$ ; für diesen Punkt führt also das Dalton'sche Gesetz zu einem richtigen Werthe des Gesamtdruckes. Wird das Volumen noch mehr vermindert, so ändert  $\Delta$  sein Vorzeichen.

Je höher die Temperatur, desto kleiner sind die Abweichungen. Bei der letzten Beobachtungsreihe, die bei der Temperatur von 48,4° C. ausgeführt wurde, also bei einer Temperatur, welche die kritische der reinen Kohlensäure um 17° übersteigt, sind die Abweichungen  $\Delta$  (mit Ausschluss des letzten Werthes) ganz minimal.

Es ist ferner die Spannkraft des Aetherdampfes in Luft, Wasserstoff und Kohlensäure, sowie auch diejenige von Schwefelkohlenstoff in Luft von Guglielmo und Musina<sup>2)</sup> untersucht worden. Die Spannkraft in einem Gase fand sich stets kleiner als im Vacuum.

Für ein Gemisch von einem Volumen Aetherdampf mit gleichem Volumen Luft, deren Druck eine Atmosphäre beträgt, soll nach Guglielmo und Musina der Unterschied schon 4,6 mm betragen.

Ähnliche Versuche sind in neuerer Zeit von F. Braun<sup>3)</sup> ausgeführt worden. Er stellte sich die Frage, ob der Druck eines in der Nähe seines Condensationspunktes stehenden Gases sich beim Mischen mit einem anderen Gas ändere, und fand, dass der Druck eines Gemisches zweier Gase im allgemeinen kleiner ist als die Summe der Partialdrucke. Doch gibt es auch Fälle<sup>4)</sup>, wo der Gesamtdruck grösser ausfallen kann, als derjenige, welchen das Dalton'sche Gesetz verlangt. Dieses Resultat ist interessant; wir haben ähnliches schon bei den Versuchen Andrews' für ein Gemisch von CO<sub>2</sub> und N<sub>2</sub> bei sehr hohen Drucken gefunden.

1) Die letzte Druckangabe in der zweiten Tabelle erfordert schon eine Correction von 73 Atmosphären.

2) Guglielmo u. Musina, Riv. scient-industr. di Firenze, Anno 19. 1887. N. 16—17. p. 185.

3) F. Braun, Wied. Ann. 34. p. 943. 1888.

4) Mischungen mit Wasserstoff. Siehe III. Theil dieser Abhandlung.

Ueber die kritische Temperatur von Gemischen.

In unmittelbarem Zusammenhang mit den Abweichungen, welche Gase und Dämpfe in ihrem Verhalten zum Dalton'schen Gesetze zeigen, steht die Lehre von der kritischen Temperatur von Gemischen zweier Gase, resp. die Aenderung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit bei Anwesenheit eines indifferenten Gases.

Dass das Vorhandensein eines indifferenten Gases die kritische Temperatur einer Flüssigkeit in ganz bedeutender Weise erniedrigen kann, haben wir schon bei der Besprechung der Andrews'schen<sup>1)</sup> Versuche gesehen.

Die älteren Beobachtungen Cailletet's<sup>2)</sup> haben ebenfalls gezeigt, dass ein Gemisch von einem Volumen Kohlensäure mit einem gleichen Volumen Luft bei 0° unter dem colossalen Druck von 400 Atmosphären immer noch nicht flüssig wurde. Ein anderes Gemisch, welches 5 Vol. Kohlensäure und 1 Vol. Luft enthielt, konnte nach Cailletet erst bei Temperaturen unter 21° C. flüssig gemacht werden.

Untersuchen wir einmal folgende Frage: Wie hoch ist die kritische Temperatur  $T_m$  eines Gemisches von  $\alpha$  Gewichtstheilen einer Flüssigkeit mit der kritischen Temperatur  $T_1$  mit  $\beta$  Gewichtstheilen einer zweiten Flüssigkeit, deren kritische Temperatur gleich  $T_2$  ist? Im allgemeinen liegt  $T_m$  zwischen  $T_1$  und  $T_2$ , sodass unter der Annahme, dass  $T_2$  grösser ist als  $T_1$ , die Beziehung gilt:

$$T_1 < T_m < T_2.$$

Für  $\alpha = 0$  würde offenbar:

$$T_m = T_2.$$

Für  $\beta = 0$ :

$$T_m = T_1.$$

Man betrachtet ein solches Gemisch oft als ein Individuum und spricht von einer bestimmten kritischen Temperatur des Gemenges; diese Ansicht vertritt z. B. van der Waals. Doch kann man die Sache etwas anders darstellen. Bei der Temperatur  $T_m$  befindet sich der erste Körper in

1) Andrews, Proc. Roy. Soc. 23. p. 581. 1875; Phil. Mag. (5) 1. p. 78. 1876. Phil. Trans. 178. A. p. 45. 1887.

2) Cailletet, Journ. de phys. 9. p. 192. 1880; Compt. rend. 90. p. 210. 1880; Beibl. 4. p. 322. 1880.



einer Temperatur, welche höher als seine eigene kritische ist, deshalb muss er sich nothwendigerweise in gasförmigem Zustand befinden. Wäre der erste Körper nicht vorhanden, so wäre die kritische Temperatur des zweiten  $= T_2$ ; da aber bei Anwesenheit desselben (und zwar müssen wir ihn nach dem Gesagten als ein Gas betrachten) die kritische Temperatur  $= T_m$  wird, so können wir diesen Vorgang so auffassen, als ob das Gas die kritische Temperatur der Flüssigkeit um  $T_2 - T_m$  Grad erniedrigt habe. Somit haben wir auch hier wieder den früheren Fall einer Erniedrigung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit durch ein indifferentes Gas.

Nach dieser Auffassung ist also die Frage nach der kritischen Temperatur von Flüssigkeitsgemischen von der früher betrachteten im wesentlichen gar nicht verschieden; wenn  $T_1$  bedeutend kleiner als  $T_2$  ist, wie z. B. für Stickstoff und Aether, so wird die Richtigkeit der eben angedeuteten Auffassung ohne weiteres einleuchten.

Versuche über die kritische Temperatur von Flüssigkeitsgemischen sind von Pawlewski<sup>1)</sup> ausgeführt worden, und führten denselben zu dem einfachen Gesetz, dass die kritische Temperatur  $T_m$  des Gemisches sich nach der folgenden Formel berechnen lässt:

$$T_m = \frac{\alpha T_1 + \beta T_2}{\alpha + \beta}.$$

Auch die Untersuchungen von O. Strauss<sup>2)</sup> über Gemische von Alkohol und Aether, sowie auch Mischungen von Alkohol und Wasser zeigten, dass jenes empirische Gesetz wenigstens für die erwähnten Flüssigkeiten als richtig betrachtet werden darf.

Ein Gemisch von gleichen Gewichtstheilen Aethyläther und Benzol ist von Ramsay<sup>3)</sup> untersucht worden. Die kritischen Temperaturen der Bestandtheile sind  $195,5^\circ$ , resp.  $291,7^\circ$  C., diejenige des Gemisches  $240,7^\circ$  C. Das Gesetz

1) Pawlewski, Chem. Ber. 15. p. 460. 1882.

2) O. Strauss, Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 12. p. 207. 1880; Beibl. 6. p. 282. 1882; Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 14. p. 510. 1882. Beibl. 7. p. 676. 1883.

3) Ramsay, Proc. Roy. Soc. 31. p. 194. 1880.

von Pawlewski würde  $243,6^{\circ}$  fordern; also herrscht ziemliche Uebereinstimmung zwischen der beobachteten und der berechneten Zahl.

Die kritischen Temperaturen von Gasmischungen sind von Ansdell<sup>1)</sup> untersucht worden, und zwar an verschiedenen Gemischen von Chlorwasserstoff und Kohlensäure. Hier ist der Chlorwasserstoff als schwer flüchtige Flüssigkeit zu betrachten, und die Kohlensäure als dasjenige Gas, welches eine Aenderung in der kritischen Temperatur des ersten Körpers hervorrufen muss.

Es ergab sich dabei, dass die beobachteten Werthe der kritischen Temperatur stets kleiner ausfielen, als die nach der Formel von Pawlewski berechneten, deswegen betrachtet Ansdell die Formel von Pawlewski als ungeeignet zur Darstellung der kritischen Temperatur von Mischungen verflüssigter Gase.

Die Aenderung der kritischen Temperatur einer Flüssigkeit bei Anwesenheit eines Gases ist auch von Hannay<sup>2)</sup> beobachtet worden<sup>3)</sup>, und van der Waals<sup>4)</sup> hat sich nochmals mit der Frage nach der kritischen Temperatur von Gasgemengen beschäftigt.

Die kritische Temperatur eines Gemenges von 7 Vol. Kohlensäure mit 3 Vol. Chlorwasserstoff wurde von demselben zu  $31,6^{\circ}$  ermittelt, also fast gleich der kritischen Temperatur der reinen Kohlensäure. Diejenige des Chlorwasserstoffs, welche nach Ansdell<sup>5)</sup> gleich  $51,3^{\circ}$  C. sein soll, ist hiermit durch die Kohlensäure um mehr als  $19^{\circ}$  erniedrigt, nach Pawlewski müsste die Differenz nur  $15,1^{\circ}$  betragen.

Van der Waals meint sogar, es könne Fälle geben, wo die kritische Temperatur eines Gemenges ausserhalb derjenigen der Bestandtheile liege. Diese Behauptung scheint mit den Resultaten der experimentellen Untersuchungen von

1) Ansdell, Proc. Roy. Soc. **34**, p. 113. 1882.

2) Hannay, Proc. Roy. Soc. **31**, p. 520. 1881.

3) Vgl. auch Kundt, Wied. Ann. **12**, p. 538. 1881.

4) Van der Waals, Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Leipzig 1881. p. 142.

5) Ansdell, Proc. Roy. Soc. **34**, p. 118. 1882.

Caillaetet und Hautefeuille<sup>1)</sup> übereinzustimmen. Bis jetzt ist jedoch diese Frage noch sehr wenig untersucht worden.

Wir haben gesehen, dass Andrews für ein Gemisch von 3,43 Vol. Kohlensäure mit 1 Vol. Stickstoff die kritische Temperatur zu  $14^{\circ}$  ermittelt hat. Die kritische Temperatur des Stickstoffs ist nach Sarrau<sup>2)</sup> gleich  $-123,8^{\circ}$  C.; mit dieser Zahl berechnet sich nach Pawlewski die kritische Temperatur des erwähnten Gemenges zu  $6,6^{\circ}$ .

Für Luft selber endlich, die ja auch nur ein Gemisch von Sauerstoff und Stickstoff ist, berechnet sich nach Pawlewski die kritische Temperatur zu  $-119,6^{\circ}$ , wenn man mit Sarrau<sup>3)</sup> die kritische Temperatur des Stickstoffs gleich  $-123,8$ , die des Sauerstoffs gleich  $-105,4^{\circ}$  annimmt. Die directe Beobachtung von v. Wroblewski<sup>4)</sup> ergab hingegen  $-140^{\circ}$ . Somit hätten wir hier ein Beispiel dafür, dass die kritische Temperatur eines Gemisches ausserhalb derjenigen seiner Bestandtheile liegt, doch können wir uns auf obige Werthe der kritischen Temperatur für Sauerstoff und Stickstoff nicht besonders verlassen, da sie von Sarrau nicht direct beobachtet, sondern aus den Zustandsgleichungen der beiden Gase abgeleitet worden sind.

Fassen wir die Resultate dieser Untersuchungen zusammen, so erkennen wir: 1) dass die kritische Temperatur einer Flüssigkeit im allgemeinen durch die Anwesenheit eines indifferenten Gases geändert wird, und zwar kann diese Aenderung, welche durchgängig in einer Erniedrigung der kritischen Temperatur zu bestehen scheint, unter Umständen (bei hohen Compressionen) ganz beträchtlich sein. 2) Diese Erniedrigung lässt sich für gewöhnliche Gasgemische durch die Formel von Pawlewski nicht mit ausreichender Genauigkeit darstellen; für Mischungen eigentlicher Flüssigkeiten scheint jedoch diese Formel nach den bisherigen Untersuchungen anwendbar zu sein. Was diese letzte Frage betrifft, so bedarf sie noch weiterer Aufklärungen und Untersuchungen. Solche Versuche sind von mir angestellt worden, und

1) Caillaetet u. Hautefeuille, *Compt. rend.* **92.** p. 901. 1881.

2) Sarrau, *Compt. rend.* **94.** p. 720. 1882.

3) Sarrau, *ibid.* p. 642 u. 720.

4) v. Wroblewski, *Wied. Ann.* **26.** p. 134. 1885.

zwar an verschiedenen Gemischen von Aceton mit Aethyläther, sowie auch von Schwefelkohlenstoff und Aethyläther.

## II. Theil.

### Experimentelle Untersuchungen.

Die experimentellen Untersuchungen zerfallen in zwei Gruppen: 1) Untersuchungen über die Spannkraft des gesättigten Dampfes von Wasser, Aethyläther und Chloräthyl in mit Luft erfüllten Räumen; 2) Untersuchungen über die kritische Temperatur von Gemischen von Aceton und Schwefelkohlenstoff mit Aethyläther.

Bei den Versuchen über Dampfspannungen bei höheren Temperaturen kommt es sehr auf die genaue Kenntniss und Constanz derselben an; es wurde daher auf diese Punkte eine besondere Aufmerksamkeit verwendet und es konnte diese Constanz der Temperatur in sehr befriedigender Weise erreicht werden. Während nun die Temperatur constant blieb, wurde die Spannkraft des gesättigten Dampfes so gemessen, dass vom totalen beobachteten Druck der Druck der Luft abgezogen wurde. Diese Messungen wurden längere Zeit hindurch in bestimmten Zeitintervallen wiederholt, um zu erkennen, inwieweit man constante und von der Zeit unabhängige Werthe erhielt. Bekanntlich hatten sich Regnault's Beobachtungsergebnisse mit der Zeit erheblich geändert; und indem ich mir die Aufgabe stellte, alle diese Vorgänge weiter zu verfolgen, um auch in die Einwirkung der Gefässwände einen Einblick zu gewinnen, musste ich die derselben Temperatur entsprechenden Beobachtungen über ein gewisses Zeitintervall ausdehnen.

Die Versuche mit Wasser wurden nach einer Differentialmethode ausgeführt, welche die Differenz der Spannkraft des Wasserdampfes in Luft und im Vacuum zu messen gestattete. Ich habe dabei zwei durchaus verschiedene Versuchsröhre benutzt, um zu untersuchen, inwieweit die Spannkraft des Dampfes von der Form des Gefässes abhängig ist. Solche Beobachtungen geben einen unmittelbaren Aufschluss über die Grösse der möglichen Einwirkung der Gefässwände.

Zur Herstellung von constanten hohen Temperaturen habe ich mich nach vielen Versuchen für folgende zwei Vorrichtungen entschlossen. Bei der ersteren wurde das Gefäß, welches mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und mit einem druckmessenden Apparat in Verbindung gesetzt war, in einen aus Kupferblech gefertigten, in seinem oberen Theil dickwandigen Kessel hineingebracht (Fig. 1 p. 607). Derselbe war denjenigen, welche gewöhnlich zur Verification des Siedepunktes der Thermometer angewandt werden, vollständig analog, nur war er noch mit einem Rückflusskühler versehen. In diesem Kessel wurden drei verschiedene Flüssigkeiten, nämlich Methylalkohol, Aethylalkohol und Wasser, zum Sieden gebracht, und so constante Temperaturen von ungefähr 64, 78 und 100° hergestellt.

Die zweite Vorrichtung zur Erzielung constanter Temperaturen, welche bei der bereits erwähnten Differentialmethode zur Verwendung kam, war die gleiche, welche auch bei der Bestimmung der Dampfdichten nach der Methode von Gay-Lussac-Hoffmann benutzt wird. Ein langes, cylindrisches Glasrohr, welches den Apparat mit der zu untersuchenden Flüssigkeit enthält, wurde unmittelbar über dem erwähnten Dampfkessel aufgestellt. Der Dampf steigt im Kessel auf, durchströmt, den Versuchsapparat umspülend, den ganzen Glascylinder und kehrt von oben durch ein anderes Rohr in den Kessel zurück. Ein Rückflusskühler hindert auch hier ein Entweichen der siedenden Flüssigkeit und bewirkt zugleich, dass im Inneren des Kessels derselbe atmosphärische Druck herrscht, wie ausserhalb desselben.

Zu den Untersuchungen über den kritischen Zustand kam eine besondere Art von Luftbad zur Verwendung (Fig. 4 p. 620), welches aus vier ineinander passenden Kasten aus Eisenblech bestand. In den innersten Kasten wurde ausser einem Thermometer ein Glasröhrchen *KK* gebracht, welches ungefähr zu einem Drittel mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt war. Zwei schraubenförmige Rührer *MM*, die sich während der Beobachtungen in lebhafter Bewegung befanden, dienten dazu, die verschieden erwärmten Luftschichten im innersten Kasten ordentlich zu mischen. Nachdem die zu untersuchende Flüssigkeit über ihren kritischen Punkt erwärmt

war, wurde unter sehr langsamem Abkühlen die Nebelbildung im Rohr, resp. das Wiedererscheinen des Meniscus und die entsprechende Angabe des Thermometers beobachtet. Mit Hilfe dieses Luftbades konnte man trotz sehr hoher Temperaturen (für reinen Schwefelkohlenstoff  $279^{\circ}\text{C}$ .) die Aenderung der Temperatur durch Zu- und Aufdrehen der Gas-  
hähne ganz gut reguliren.

Bei den Untersuchungen über Dampfspannungen habe ich hauptsächlich zwei Normalthermometer benutzt, auf deren Angaben ich mich besonders verlassen konnte. Eines derselben war ein „Etalon normal“ Nr. 4114 (1870, 2) von Baudin in Paris, ein vortreffliches, in Fünftelgrade getheiltes Thermometer, dessen Correction von 0 bis  $100^{\circ}$  fast die ganze Scala hindurch fast constant blieb. Das andere Normalthermometer war von Greiner in Stützerbach (Thüringen) aus Normalglas angefertigt und in Zehntelgrade getheilt. Beide wurden sorgfältigst calibriert, die festen Punkte der Scala ermittelt und alsdann während der Dauer der Untersuchungen die Nullpunkte mehrmals wieder bestimmt. Die Ablesung der Thermometer geschah gewöhnlich mittelst eines Fernrohres.

Für die Bestimmung sehr hoher Temperaturen, wie sie bei den Versuchen über den kritischen Zustand von Flüssigkeitsgemischen vorkamen, habe ich zwei von Geissler in Bonn verfertigte Thermometer benutzt (Nr. 394 und 395, Marke der Reichsanstalt). Beide wurden vor Beginn und nach Abschluss der Beobachtungen der Reichsanstalt zugeschickt, um genau untersucht zu werden, und die von jener Anstalt mitgetheilten Correctionstabellen immer zur Reduction meiner Thermometerablesungen<sup>1)</sup> in Celsiusgraden benutzt.

Die Bestimmung aller Niveaudifferenzen geschah mittelst eines Kathetometers von Perreaux. Zur Beobachtung des atmosphärischen Druckes habe ich ein gutes Heberbarometer benutzt, nachdem ich mich überzeugt hatte, dass die Luftmenge im oberen Theil des Barometerrohres ganz verschwindend klein war, und jedenfalls einen Fehler über 0,1 mm nicht veranlassen konnte.

1) Herausragende Fäden mitberücksichtigt.

Die benutzten Flüssigkeiten, nämlich Chloräthyl, Aethyläther, Aceton und Schwefelkohlenstoff wurden von Kahlbaum in Berlin bezogen.

#### Versuche mit Wasserdampf.

Die angewandte Differentialmethode bestand im wesentlichen in Folgendem: Ein langes, U-förmig gebogenes Glasrohr *A* (Fig. 1), auf welchem eine Millimetertheilung angebracht war, wurde ungefähr zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt. Ueber dem Quecksilber befand sich in jedem Schenkel des Rohres eine kleine Wassersäule *C*; der Raum über dem Quecksilber im rechten Schenkel enthielt ausserdem eine gewisse genau bestimmte Quantität Luft; im linken Schenkel hingegen war der Raum durch mehrfaches sorgfältiges Auskochen des Wassers luftfrei gemacht. Wenn die Spannkraft  $e'$  des Wasserdampfes in Luft gleich derjenigen im Vacuum war (die wir mit  $e$  bezeichnen), so musste die reducirte Quecksilbersäule im Apparat direct den Druck der

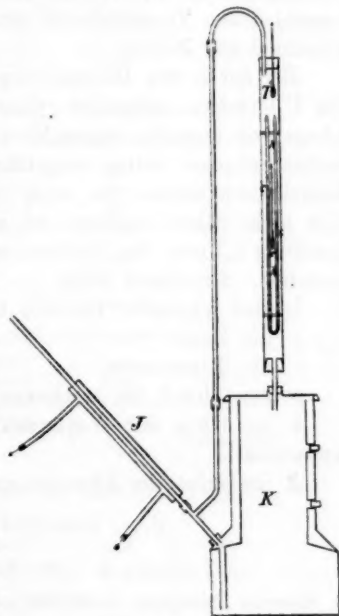


Fig. 1.

Luft allein angeben. Dieser Druck ergab sich aber aus dem bekannten Volumen der Luft und ihrer Temperatur; eine Vergleichung beider Zahlen ergab unmittelbar die Grösse der Abweichung vom Dalton'schen Gesetze. Es musste nur dafür gesorgt werden, dass die Temperatur überall constant blieb.

Bezeichnen wir durch  $m$  den Druck, welcher der gemessenen Quecksilbersäule entspricht und durch  $p$  den Druck der Luft im rechten Schenkel des Apparates, so ist:



$$p + e' = e + m.$$

Hieraus folgt:

$$\Delta = e - e' = p - m.$$

Die Versuchsanordnung ergibt sich unmittelbar aus der Figur. *K* ist der mit Rückflusskühler *J* versehene Kessel.

Nach dieser Methode wurden drei verschiedene Beobachtungsreihen ausgeführt. Eine jede derselben umfasst Bestimmungen der Spannkraft des Wasserdampfes in Luft bei verschiedenen Temperaturen und für gleiche Temperatur zu verschiedenen Zeiten.

Bei der ersten Beobachtungsreihe hatte jeder Schenkel des U-förmigen, möglichst cylindrischen Versuchsrohres eine Länge von ungefähr einem Meter. Der innere Durchmesser beider Schenkel betrug ungefähr 2 mm. Die verschiedenen Einzelheiten dieses wie auch anderer Versuche werde ich hier nicht näher angeben; ich verweise auf die Originalabhandlung („Ueber das Dalton'sche Gesetz“. Inauguraldisertation. Strassburg 1890).

In den folgenden Tabellen bedeutet:

*z* die Zeit,

*t* die Temperatur,

*p* den Druck der trockenen Luft,

*h* die Höhe der Wassersäule im rechten Schenkel des Apparates<sup>1)</sup>,

$\Delta$  die Grösse der Abweichung vom Dalton'schen Gesetze.

#### Erste Beobachtungsreihe.

Tabelle I. (29. November 1888.)

Siedende Flüssigkeit: Aethylalkohol. — Anfang des Siedens 9<sup>h</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>h</i>	$\Delta$
9 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	77,68°	202,5 mm	22,9 mm	4,0 mm
10 0	77,68	202,5 "	22,9 "	3,9 "
10 30	77,68	202,5 "	22,9 "	4,0 "
11 0	77,68	202,5 "	23,0 "	4,2 "
2 15	77,61	203,0 "	23,1 "	7,1 "
3 0	77,60	203,2 "	22,9 "	8,7 "
3 30	77,58	203,4 "	22,9 "	10,2 "
				wächst immer

1) Ich gebe diese Grösse an, da sie einen Aufschluss gibt über den Grad der Benetzung der Wände.

Tabelle II. (30. November.)

Siedende Flüssigkeit: Aethylalkohol. — Anfang des Siedens 8<sup>h</sup> 25<sup>m</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>h</i>	<i>Δ</i>
8 <sup>h</sup> 55 <sup>m</sup>	77,76°	204,1 mm	23,0 mm	14,2 mm

Tabelle III. (30. November.)

Siedende Flüssigkeit: Wasser.

3 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	99,85	215,8	22,3	18,8
3 10	99,84	216,0	22,5	19,7

Tabelle IV. (1. December.)

Siedende Flüssigkeit: Wasser. — Anfang des Siedens: 9<sup>h</sup> 25<sup>m</sup>.

9 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup>	99,12	215,0	21,3	22,0
38	98,93	215,0	21,6	21,9
43	99,09	215,3	22,0	22,2
52	99,10	215,7	22,2	25,2
2 <sup>h</sup> 54 <sup>m</sup>	99,85	217,9	21,6	34,4

Tabelle V. (1. December.)

Siedende Flüssigkeit: Aethylalkohol.

3 <sup>h</sup> 47 <sup>m</sup>	78,09	204,6	21,9	18,1
54	78,09	204,6	22,2	17,5
4 3	78,11	204,6	22,3	17,5
20	78,13	204,6	22,3	17,5

Nachher blieb  
*Δ* constant

Tabelle VI. (Beob. bei niedriger Temp.)

22. November.

—	11,66	167,9	21,9	1,5
—	11,68	167,9	21,9	1,5

30. November.

8 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup>	16,9	170,7	22,4	1,1
--------------------------------	------	-------	------	-----

1. December.

8 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	15,55	169,7	21,8	0,2
--------------------------------	-------	-------	------	-----

Diese erste Versuchsreihe wurde, wie gesagt, mit einem langen, engen Rohr angestellt, in dem also die Diffusion des Wasserdampfes durch die Luft sehr langsam vor sich gehen musste. In dieser Hinsicht waren die Versuche nur eine Ausdehnung der Regnault'schen auf viel höhere Temperaturen. Wenn also Regnault's Erklärung für die beobachteten Abweichungen wirklich richtig war, so mussten

analoge Erscheinungen, wie die von ihm wahrgenommenen, auch hier zum Vorschein kommen.

Betrachten wir die Zahlen der vorliegenden Tabellen, so sehen wir, dass überall die Spannkraft des Wasserdampfes in Luft kleiner ausfällt, als im Vacuum, obgleich der Druck der trockenen Luft ziemlich gering ist (= ca. 200mm). Bei niedrigen Temperaturen (Tab. VI) sind die Abweichungen wieder sehr gering; im allgemeinen wachsen die Abweichungen  $\Delta$  mit der Zeit, ganz analog den Beobachtungen Regnault's.

Bei allen diesen Versuchen wurde, da der aus dem Kessel aufsteigende Dampf die Wassersäule im rechten Schenkel zuerst traf, diese zuerst erwärmt; infolge dessen stieg das Quecksilber im linken Schenkel empor, und zwar ziemlich rasch. Erst wenn der Dampf bis zum oberen Theile des Cylinders gelangt war, wurde auch diese zweite Wassersäule erwärmt, dann fiel das Quecksilber wieder und nahm seine definitive Einstellung. Durch diese Rückbewegung des Quecksilbers wurde der Dampf im rechten Schenkel comprimirt, was offenbar für die Sättigung des Dampfraumes sehr günstig war.

Die fortwährende Zunahme von  $\Delta$  erkläre ich mir einfach so, wie Regnault: Die Glaswände absorbiren Wasserdampf in den oberen Theilen des Rohres, und da neue Dampftheilchen die entzogenen wegen der langsamen Diffusion nicht rasch genug ersetzen können, so bleibt ein Theil des Dampfraumes ungesättigt, und folglich muss der Druck sinken. Einen Beweis für die Richtigkeit dieser Erklärung liefern die Beobachtungen vom 1. Dec. (Tab. IV).

Wenn die Quecksilbersäule beim Beginn des Erwärmens links in die Höhe getrieben wurde, so kam das Wasser rechts in Berührung mit den unteren Theilen des rechten Schenkels des Versuchsrohres, wobei dann beim Fallen des Quecksilbers einige Wassertheilchen wohl an dem Glas hängen bleiben konnten. Bei den Beobachtungen am 1. Dec. (Tab. IV) verdampfte ein solches Wassertheilchen bei Beginn des Erwärmens, ein Stück der Quecksilbersäule wurde losgerissen, und mit dem darüber befindlichen Wasser im rechten Schenkel emporgetrieben. Dieses Säulchen vereinigte sich nachher

wieder mit der übrigen Quecksilbermasse, doch blieben die Wände des Rohres mit Wasser benetzt<sup>1)</sup>; trotzdem aber war die Spannkraft des Wasserdampfes bedeutend kleiner als im Vacuum. Während der ersten acht Minuten blieb die Spannkraft constant, obgleich das Wasser die ganze Zeit an den Wänden herabfloss, was man daraus erkennt, dass  $h$  sich fortwährend vergrösserte. Nun bemerkte ich ganz deutlich, dass, sobald die Wassersäule  $h$  eine gewisse Höhe erreicht hatte, also eine bestimmte Menge Wasser nach unten geflossen war, der Druck plötzlich zu sinken anfing. Nach neun weiteren Minuten war er schon um 3 mm kleiner.

Dieses Resultat beweist also erstens, dass, auch wenn die Gefässwände mit Wasser benetzt sind, die Spannkraft des Dampfes in Gefässen der beschriebenen Form bei höheren Temperaturen kleiner ist, als im Vacuum; zweitens dass die Adhäsion des Dampfes an den Gefässwänden in der That eine nicht unbedeutende Rolle spielt.

#### Zweite Beobachtungsreihe.

Diese Beobachtungsreihe wurde nach derselben Methode ausgeführt, wie die vorhergehende, nur war die Form des benutzten Apparates eine wesentlich andere, wie aus Fig. 2 ersichtlich ist. Der linke Schenkel  $a$  hatte eine Länge von ungefähr einem Meter, der innere Durchmesser betrug ungefähr 4,6 mm. Der rechte Schenkel  $b$  hatte denselben Durchmesser, und eine Länge von 40 cm; der weitere Theil  $A$  eine Höhe von ungefähr 5 cm, sein innerer Durchmesser war = 3,11 cm, also fast siebenmal grösser als der des engeren Rohres. Gefässe von der beschriebenen Form sind für die Untersuchungen der Spannkraft von Flüssigkeiten in Gasen besonders geeignet. Da das Rohr  $A$ , in welchem sich der Wasserdampf und die Luft befanden, eine sehr geringe Höhe hatte, konnte sich die Diffusion sehr rasch vollziehen, also musste die störende Wirkung der Gefässwände auf



Fig. 2.

1) Bei den Beobachtungen von Guglielmo und Musina wurde diese Benetzung der Wände durch besondere Hilfsmittel erreicht; in diesem Fall geschah dies gewissermaassen von selbst.

die Spannkraft des Wasserdampfes ganz minimal sein. Da die früheren Versuche gezeigt haben, dass die Gefässwände in der That störend einwirken können, sind bei allen folgenden Versuchen, nicht nur bei denen mit Wasser, sondern auch bei den mit Aethyläther und Chloräthyl angestellten, immer Apparate von der eben beschriebenen Form benutzt worden.

Die Aenderungen des Luftvolumens konnten durch Beobachtung der Verschiebung der Quecksilberkuppe im linken engen Rohr genau ermittelt werden. Verschiedene Correctionen für Temperatur, Capillarität, Wassersäule wurden selbstverständlich immer in Betracht gezogen.

Tabelle I.  
(31. Januar 1889.)

Siedende Flüssigkeit: Aethyl-  
alkohol. — Vollkommenes Sieden  
um 2<sup>h</sup> 50<sup>m</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>Δ</i>
2 <sup>h</sup> 54 <sup>m</sup>	77,91°	351,2 mm	0,4 mm
3 0	77,91	351,2 "	0,4 "
10	77,92	351,2 "	0,5 "
20	77,95	351,2 "	0,4 "
33	77,95	351,2 "	0,6 "
40	77,96	351,2 "	0,6 "
50	77,96	351,2 "	0,6 "
4 0	77,97	351,2 "	0,6 "

Tabelle II.  
(1. Februar.)

Siedende Flüssigkeit: Aethyl-  
alkohol. — Vollkommenes Sieden  
um 3<sup>h</sup> 20<sup>m</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>Δ</i>
3 <sup>h</sup> 25 <sup>m</sup>	77,82°	350,6 mm	3,1 mm
32	77,81	350,6 "	3,1 "
39	77,83	350,6 "	3,2 "
46	77,83	350,6 "	3,3 "
53	77,84	350,7 "	3,6 "
4 0	77,83	350,7 "	3,8 "

Tabelle III. (2. Februar.)

Siedende Flüssigkeit: Wasser. — Vollkommenes Sieden um 9<sup>h</sup> 30<sup>m</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>Δ</i>
9 <sup>h</sup> 58 <sup>m</sup>	98,64°	365,5 mm	3,3 mm
10 5	98,64	365,5 "	2,7 "
13	98,65	365,5 "	3,1 "
20	98,65	365,5 "	3,4 "
28	98,66	365,5 "	2,6 "
39	98,67	365,5 "	3,8 "
45	98,67	365,5 "	3,7 "

Tabelle IV. (2. Februar.)

2 <sup>h</sup> 47 <sup>m</sup>	64,31	338,0	2,9
56	—	—	2,8

Hier konnten leider die Beobachtungen nicht fortgesetzt werden, da das Versuchsrohr plötzlich sprang. Was bei der Betrachtung dieser Tabellen zuerst in die Augen fällt, ist, dass alle Abweichungen  $\Delta$  sogar bis zu  $100^\circ$  hinauf sehr klein sind. Man konnte nach dem, was über den Einfluss der Form des Gefäßes gesagt worden ist, zwar a priori wohl erwarten, dass dieselben viel kleiner ausfallen würden, als bei den früheren Versuchen; doch sind auch die absoluten Werthe dieser Abweichungen sehr klein.

Betrachtet man die Zahlen der vorliegenden Tabellen näher, so sieht man, dass die Grössen  $\Delta$  sehr constant bleiben und überhaupt von der Zeit wenig abhängig zu sein scheinen, was bei meinen früheren Beobachtungen, sowie auch bei denen Regnault's keineswegs der Fall war.

Bei diesen Beobachtungen konnte vielleicht am Anfang eine Uebersättigung des Dampfraumes im rechten Schenkel und ein Verflüssigungsverzug stattfinden; denn wie bei der ersten Beobachtungsreihe wurde das Wasser im rechten Schenkel vom aufsteigenden Dampfe zuerst erwärmt, und stieg also links das Quecksilber. Beim Fallen des letzteren verkleinerte sich das Dampfvolumen rechts fortwährend; die Bedingungen für die Sättigung und sogar Uebersättigung des Dampfraumes waren also sehr günstig.

## Dritte Beobachtungsreihe.

Tabelle I.

(8. Februar 1889).

Siedende Flüssigkeit: Wasser.

$z$	$t$	$p$	$\Delta$
9 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup>	99,24°	371,5 mm	-1,9 mm
22	99,24	—	-1,7 „
30	99,24	—	-1,5 „
50	99,24	—	-1,4 „
57	99,24	—	-1,3 „
10 9	99,25	—	-1,3 „

Tabelle II.

(9. Februar 1889).

Siedende Flüssigkeit: Methylalkohol.  
— Vollkommenes Sieden um 10<sup>h</sup> 58<sup>m</sup>.

$z$	$t$	$p$	$\Delta$
11 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>	64,26°	340,5 mm	-0,4 mm
27	64,26	—	-0,5 „
36	64,26	—	-0,3 „
44	64,26	—	-0,5 „
52	64,26	—	-0,8 „
59	64,36	—	+0,2 „

Tabelle III. (9. Februar.)

Siedende Flüssigkeit: Aethylalkohol.  
— Vollkommenes Sieden um 3<sup>h</sup> 2<sup>m</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>Δ</i>
3 <sup>h</sup> 15 <sup>m</sup>	77,18 <sup>o</sup>	351,4 mm	-7,9 mm
24	77,18	352,1 "	-4,3 "
31	77,17	352,3 "	-3,0 "
38	77,18	352,5 "	-2,0 "
47	77,18	352,6 "	-1,4 "
57	77,19	352,6 "	-1,1 "
4 7	77,20	352,7 "	-0,7 "
17	77,20	352,7 "	-0,5 "
27	77,20	352,7 "	-0,5 "
37	77,20	352,7 "	-0,5 "
47	77,20	352,8 "	-0,3 "

Tabelle V. (11. Februar.)

Siedende Flüssigkeit: Methylalkohol.  
— Vollkommenes Sieden um 2<sup>h</sup> 38<sup>m</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>Δ</i>
2 <sup>h</sup> 44 <sup>m</sup>	64,36 <sup>o</sup>	340,6 mm	+0,7 mm
51	64,51	340,6 "	0,6 "
58	64,50	340,5 "	0,2 "
3 5	64,52	340,5 "	0,3 "
12	64,49	340,5 "	0 "
19	64,59	340,5 "	-0,3 "
26	64,66	340,6 "	+0,1 "
33	64,66	340,6 "	-0,5 "

Tabelle IV. (11. Februar.)

Siedende Flüssigkeit: Aethylalkohol.  
— Vollkommenes Sieden um 8<sup>h</sup> 57<sup>m</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>Δ</i>
9 <sup>h</sup> 0 <sup>m</sup>	77,06 <sup>o</sup>	352,5 mm	-2,5 mm
7	77,09	352,5 "	-1,5 "
18	77,09	352,6 "	-1,4 "
25	77,09	352,6 "	-1,2 "
35	77,09	352,6 "	-1,0 "
45	77,10	352,6 "	-1,0 "
55	77,10	352,6 "	-0,7 "
10 5	77,11	352,6 "	-0,7 "
11 7	77,14	352,7 "	-0,5 "

Tabelle VI. (12. Februar.)

Siedende Flüssigkeit: Methylalkohol.  
— Vollkommenes Sieden um 9<sup>h</sup> 58<sup>m</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>Δ</i>
10 <sup>h</sup> 10 <sup>m</sup>	64,66 <sup>o</sup>	340,5 mm	+0,6 mm
18	64,70	340,4 "	0,5 "
26	64,76	340,4 "	0,1 "
34	64,86	340,4 "	1,0 "
42	64,84	340,3 "	0,6 "
50	64,86	340,4 "	0,7 "
58	64,92	340,4 "	1,0 "

Tabelle VII. (12. Februar.)

Siedende Flüssigkeit: Wasser. Vollkommenes Sieden um 2<sup>h</sup> 58<sup>m</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>Δ</i>
3 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	99,04 <sup>o</sup>	371,0 mm	-3,3 mm
48	99,04	371,1 "	-2,7 "
56	99,04	371,1 "	-2,5 "
4 4	99,04	371,1 "	-2,7 "
12	99,04	371,2 "	-2,5 "
20	99,09	371,3 "	-2,3 "
28	99,14	371,4 "	-2,1 "
37	99,14	371,3 "	-2,2 "

Betrachtet man die Zahlen dieser Tabellen, so erkennt man, dass der Unterschied zwischen der Spannkraft des Wasserdampfes in Luft (bei ungefähr 360 mm Druck derselben) und derjenigen im Vacuum sehr gering ist. Dass



kleine negative Werthe von  $\Delta$  vorkommen, kann uns nicht wundern; sie können durch Beobachtungsfehler, die bei so hohen Temperaturen schwer vollständig zu eliminiren sind oder durch einen etwaigen Verflüssigungsverzug bedingt sein. Ein solcher fand höchst wahrscheinlich bei den Beobachtungen am 9. Februar (Tab. III) statt, da die Spannkraft des Wasserdampfes in Luft anfangs um 7,9 mm grösser war, als im Vacuum. Wüllner und andere haben sogar, wie wir sahen, eine Erhöhung der Spannkraft eines reinen gesättigten Dampfes bei seiner Compression wahrgenommen. Es ist deshalb sehr wohl möglich, dass auch hier, wo es sich um ein Gemisch handelt, bei welchen bekanntlich diese anomalen Erscheinungen mit viel grösserer Leichtigkeit auftreten, ein Verflüssigungsverzug stattgefunden habe, umso mehr, als auch dieses Gemisch anfangs comprimirt wurde. Die Spannkraft des Dampfes in Luft blieb jedoch nicht constant, sondern nahm stetig ab; nach Verlauf einer Stunde war sie derjenigen im Vacuum fast gleich und erlitt alsdann keine merklichen Aenderungen mehr. Auch Tab. IV zeigt eine Abnahme der Spannkraft, und zwar wieder bis zu fast demselben Werth  $\Delta = -0,5$  mm, wie im vorigen Falle.

Es ist zu bemerken, dass alle Beobachtungen bei siedendem Methylalkohol wegen der Schwierigkeit, eine constante Temperatur im ganzen Dampfrohre zu erhalten, etwas unsicher sind.

Die Werthe von  $\Delta$ , welche verschiedenen Tabellen angehören und derselben Temperatur entsprechen, stimmen im allgemeinen gut überein.<sup>1)</sup> Die Abweichungen dürften theilweise dadurch zu erklären sein, dass im allgemeinen die Spannkraft des gesättigten Dampfes einer Flüssigkeit in einem Gas wegen der Leichtigkeit, mit welcher bei einem solchen Gemisch ein Verflüssigungsverzug eintreten kann, eine ziemlich unbestimmte Grösse ist.

Die Resultate der Beobachtungen mit Wasserdampf kann man kurz in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Die Spannkraft des Wasserdampfes in Luft unterscheidet sich von derjenigen im Vacuum auch bei hohen

1) Vgl. z. B. die letzten Zahlen der Tab. III und IV.

Temperaturen bis zu  $100^{\circ}$  nur sehr wenig. Folglich kann das Dalton'sche Gesetz für Wasserdampf innerhalb dieser Grenzen fast ohne Einschränkung als richtig angenommen werden.

2. Die Absorption des Wasserdampfes durch die Gefäßwände hat in langen und engen Gefäßen, wo der Dampf nur langsam durch die Luft durchdiffundiren kann, eine ganz beträchtliche Verminderung von dessen Spannkraft zur Folge. Die Regnault'sche Erklärung für das von ihm beobachtete, vom Dalton'schen Gesetz abweichende Verhalten von Dämpfen ist theilweise richtig.

#### Versuche mit Aethyläther.

Da es bei den Versuchen mit Aethyläther, dessen Spannkraft sehr gross ist, auf die Constanz und genaue Kenntniss der Temperatur wesentlich ankommt, konnte ich die frühere Differentialmethodenichtmehr gut anwenden.

Die neue Versuchsanordnung ergibt sich aus Fig. 3. Im rechten Schenkel *A* des Versuchsrohres befand sich über dem Quecksilber Aether, resp. Aetherdampf und eine bekannte Quantität Luft; der linke Schenkel *B* dagegen enthielt, da er als Luftmanometer dienen sollte, oben nur trockene Luft. Der erstere Schenkel *A* mit der zu untersuchenden Flüssigkeit befand sich vollständig im Inneren des Kessels *K*. Der lange Schenkel *BB* ragte aus dem Kessel heraus und war in seinem oberen Theile von einem cylindrischen Glasmantel *CC* umschlossen. Das Rohr *D*

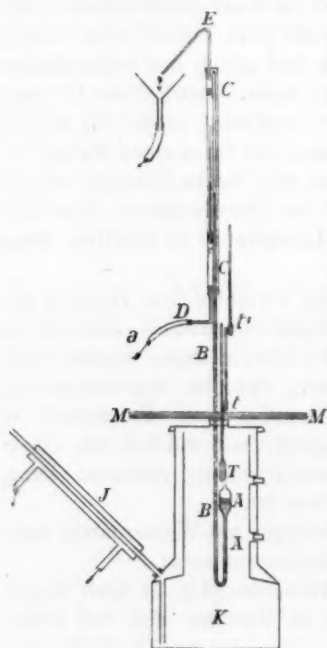


Fig. 3.

führte in diesen einen Wasserstrom ein, welcher durch ein anderes Rohr *E* wieder ausfloss. Dadurch konnte in der ganzen Luftsäule des Manometers eine constante Temperatur hergestellt werden. *MM* ist ein Doppelschirm.

Da bei diesen Versuchen das Luft-, resp. Dampfvolumen beim Erwärmen sich allmählich vergrößerte und nachher keine plötzliche Verminderung desselben eintreten konnte, wie bei früheren Experimenten, so war eine Uebersättigung des Dampfraumes, resp. ein Verflüssigungsverzug nicht zu erwarten.

In nachstehenden Tabellen bedeuten:

*z* die Zeit,

*t* die Temperatur des Aetherdampfes,

*p* den Druck der über dem Aether befindlichen Luft,

*e'* die Spannkraft des Aetherdampfes in Luft,

*e* diejenige im Vacuum,

*A* die Differenz beider, also  $= e - e'$ .

Tabelle I. (28. Februar 1889.)

Siedende Flüssigkeit: Methylalkohol. — Anfang des Siedens:  $10^h 5^m$ .

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>e'</i>	<i>e</i>	<i>A</i>
$10^h 9^m$	63,34°	627 mm	1908 mm	1905 mm	-3 mm
15	63,53	628 "	1913 "	1915 "	+2 "
32	63,63	628 "	1917 "	1921 "	4 "
44	63,63	628 "	1919 "	1921 "	2 "
56	63,64	628 "	1919 "	1921 "	2 "
11 3	63,64	628 "	1920 "	1921 "	1 "

Tabelle II. (28. Februar.)

Siedende Flüssigkeit: Methylalkohol. — Anfang des Siedens:  $2^h 34^m$ .

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>e'</i>	<i>e</i>	<i>A</i>
$2^h 45^m$	63,50°	628 mm	1911 mm	1914 mm	3 mm
57	63,66	—	1918 "	1923 "	5 "
3 12	63,66	—	1921 "	1923 "	2 "
35	63,66	—	1921 "	1923 "	2 "
51	63,68	—	1921 "	1924 "	3 "
4 0	63,69	—	1921 "	1924 "	3 "

Tabelle III. (2. März.)

Siedende Flüssigkeit: Aethylalkohol.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>e'</i>	<i>e</i>	<i>A</i>
$10^h 50^m$	77,86°	647 mm	2839 mm	2857 mm	18 mm
56	77,85	—	2841 "	2856 "	15 "
11 0	77,85	—	2839 "	2856 "	17 "
17	77,87	—	2841 "	2857 "	16 "
31	77,89	—	2842 "	2859 "	17 "
43	77,90	—	2842 "	2860 "	18 "

Tabelle IV. (4. März.)

Siedende Flüssigkeit: Aethylalkohol. — Anfang des Siedens 8<sup>h</sup> 49<sup>m</sup>.

<i>z</i>	<i>t</i>	<i>p</i>	<i>e'</i>	<i>e</i>	<i>Δ</i>
8 <sup>h</sup> 53 <sup>m</sup>	77,96°	647 mm	2845 mm	2864 mm	19 mm
9 0	78,01	—	2853 "	2868 "	15 "
12	78,02	—	2854 "	2869 "	15 "
31	78,03	—	2855 "	2870 "	15 "
46	78,04	—	2856 "	2870 "	14 "
10 1	78,04	—	2855 "	2870 "	15 "

Tabelle V. (4. März.)

Siedende Flüssigkeit: Aethylalkohol. — Anfang des Siedens: 2<sup>h</sup> 30<sup>m</sup>.

2 <sup>h</sup> 39 <sup>m</sup>	78,01°	647 mm	2851 mm	2868 mm	17 mm
46	78,02	—	2852 "	2869 "	17 "
3 1	78,02	—	2853 "	2869 "	16 "
16	78,03	—	2854 "	2870 "	16 "
31	78,02	—	2856 "	2869 "	13 "
46	78,03	—	2856 "	2870 "	14 "

Tabelle VI. (5. März.)

Siedende Flüssigkeit: Wasser. — Anfang des Siedens lange vor Beginn der Beobachtungen.

10 <sup>h</sup> 48 <sup>m</sup>	99,72°	684 mm	4853 mm	4921 mm	68 mm
57	99,73	—	4855 "	4922 "	67 "
11 1	99,73	—	4857 "	4922 "	65 "
7	99,73	—	4857 "	4922 "	65 "
2 16	99,74	—	4856 "	4923 "	67 "
31	99,74	—	4858 "	4923 "	65 "
46	99,74	—	4856 "	4923 "	67 "
3 1	99,75	—	4854 "	4925 "	71 "
16	99,76	—	4857 "	4926 "	69 "
31	99,77	—	4858 "	4927 "	69 "

Tabelle VII. (6. März.)

Siedende Flüssigkeit: Wasser. — Anfang des Siedens: 10<sup>h</sup> 35<sup>m</sup>.

10 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	99,88°	684 mm	4866 mm	4939 mm	73 mm
50	99,88	—	4866 "	4939 "	73 "
11 0	99,89	—	4867 "	4941 "	74 "
15	99,89	—	4869 "	4941 "	72 "
30	99,90	—	4866 "	4942 "	76 "
45	99,90	—	4867 "	4942 "	75 "

Aus vorstehenden Tabellen erkennt man, dass auch für Aethyläther die Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz verhältnissmässig klein ausfallen, für niedrige Temperaturen jedenfalls bedeutend kleiner, als bei Regnault, denn noch bei 78° beträgt  $\Delta$  nur 16 mm. Da bei diesen Versuchen der störende Einfluss der Absorption des Dampfes

an den Wänden ganz minimal sein sollte, so muss ich die auffallend grossen Werthe der von Regnault beobachteten Abweichungen bei Aetherdampf dem Einfluss der Gefässwände, resp. der Diffusionsverzögerung zuschreiben. Stellt man die mittleren Werthe, welche sich aus diesen Tabellen ergeben, zusammen, so erhält man folgende Zahlen:

$t$	$p$	$e$	$\Delta$	$100 \frac{\Delta}{e}$
63,63	628	1920	2,6	0,1%
77,97	647	2865	15,9	0,6 „
99,80	684	4930	69,7	1,4 „

Die obigen Tabellen zeigen ferner, dass die Spannkraft  $e'$  des Aetherdampfes in Luft fast unmittelbar nach dem Anfang des Siedens erreicht wurde, und dann fast völlig unverändert blieb, wie dies besonders aus Tab. VI hervorgeht, wo die Beobachtungen sich über einen Zeitraum von fast fünf Stunden erstreckten.

Auch die verschiedenen Tabellen angehörenden Werthe von  $\Delta$ , welche sich auf gleiche Temperaturen beziehen, sind fast genau gleich. Man kann sich also noch einmal überzeugen, dass bei Anwendung weiter und niedriger Gefässe wirklich sehr constante und von der Zeit unabhängige Resultate erzielt werden können.

#### Versuche mit Chloräthyl.

Die Versuche mit Chloräthyl wurden ebenso ausgeführt, wie die mit Aethyläther, können aber auf grosse Genauigkeit keinen Anspruch machen, da das benutzte Manometerrohr sich leider für feine Messungen als ungenügend erwies, ich werde daher an dieser Stelle die einzelnen Werthe von  $\Delta$  nicht mittheilen und nur die oberen Grenzen von  $100 \Delta/e$  angeben.

Die wirklichen Werthe der Abweichungen vom Dalton'schen Gesetz sind wahrscheinlich viel geringer.

$t$	$p$	$100 \frac{\Delta}{e}$
63,6°	316	1,4%
77,5	324	1,6 „
100,5	340	2,6 „

Auch bei diesen Beobachtungen konnte kein Verflüssigungsverzug stattfinden, wohl aber, wie bei den letzten Beobachtungen mit Aether, ein Siedeverzug, der eine Verkleinerung der Spannkraft des gesättigten Dampfes zur Folge haben könnte.

#### Versuche über die kritische Temperatur von Gemischen.

Die Versuchsanordnung habe ich schon früher angegeben. Dieselbe ist aus Fig. 4 ersichtlich.

Die vier ineinander passenden Kasten aus Eisenblech *AA, BB, CC, DD* berührten sich an keiner Stelle und wurden von unten und an den Seiten durch kleine Glasstäbe *a*, resp. *b* in ihrer gegenseitigen Lage gehalten. An jedem Kasten befanden sich zwei Fenster *F* gegenüber. Der ganze Apparat wurde durch einen grossen 21-Brenner von unten erwärmt.

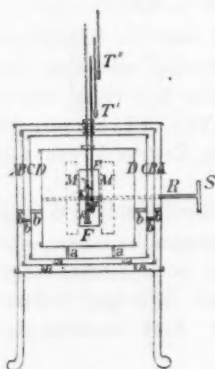


Fig. 4.

Dicht neben dem Versuchsrohr *K* befand sich ein Thermometer *T*. *T'* und *T''* sind Hülftthermometer. Am Ende der Axe *R*, welche die schraubenförmigen Rührer *MM* trug, befand sich eine Rolle *S*, welche mit einem Wassermotor in Verbindung stand, der die beiden Flügel *M* in eine rasche rotirende Bewegung setzen und so eine energische Mischung der Luftschichten im inneren Kasten bewerkstelligen konnte.

Zunächst wurden nun die kritischen Temperaturen der reinen Flüssigkeiten bestimmt.

#### Bestimmung der kritischen Temperatur des Aethyläthers.

Der zu den ersten Versuchen verwendete Aether war im Winter 1888/89 bezogen; der später (Sommer 1889) gelieferte zeigte eine etwas verschiedene kritische Temperatur, wie wir sehen werden. Das Versuchsrohr wurde zuerst ganz mit Aether gefüllt, dann ein Theil des Aethers ausgekocht, um die Luft aus dem Röhrchen herauszutreiben. War die nöthige Menge Flüssigkeit auf diese Weise entfernt, so wurde das

Röhrchen zugeschmolzen und in das Luftbad hineingebracht. Hier wurde dieselbe bis auf einige Grad über die kritische Temperatur erhitzt und dann bei langsamem Temperaturabfall die Temperatur im Moment der Nebelbildung, resp. des Wiedererscheinens des Meniscus beobachtet.

Die so ausgeführten Versuche ergaben folgende Werthe für die kritische Temperatur des von mir benutzten Aethyläthers:

190,8   190,8   190,4   190,9   191,1° C.

Die mittlere kritische Temperatur des Aethyläthers ist also 190,8° C.

Nachdem diese bestimmt war, wollte ich noch untersuchen, ob ein Zusatz von Luft die kritische Temperatur in merklicher Weise ändern könne. Zu diesem Zwecke öffnete ich das Röhrchen wieder, setzte es in schmelzendes Eis, um die Spannkraft des Aetherdampfes zu vermindern und eine gewisse Menge Luft eintreten zu lassen. Dann wurde nach Ablesung des Barometerstandes das Röhrchen wieder zugeschmolzen. Aus dem Drucke und dem Volumen wurde die Menge der eingeschlossenen Luft berechnet; auch das Gewicht des Aethers wurde bestimmt. Alle Auswägungen wurden am Schluss der Beobachtungen gemacht.

Es ergab sich in dieser Weise für den Druck der Luft bei der beobachteten kritischen Temperatur ca. 0,86 Atm. und für die kritische Temperatur des Aethers folgende Werthe:

190,3   190,6   190,3   190,9   191,0   189,7° C. Mittelwerth 190,5° C.

Die kritische Temperatur des Aethers in Luft war also kaum kleiner als die des reinen Aethers, was ja auch zu erwarten war.

Eine Reihe von Beobachtungen mit dem im Sommer 1889 bezogenen Aether, welcher zur Herstellung verschiedener Mischungen benutzt worden war, ergaben für dessen kritische Temperatur folgende Werthe:

191,3   192,0   191,2   192,5° C. Mittelwerth 191,8° C.

Mit diesem Werthe sind die weiter unten mitzutheilenden Rechnungen durchgeführt.



## Bestimmung der kritischen Temperatur des Acetons.

Das benutzte Aceton wurde zuerst im Vacuum eines Barometerrohres luftfrei gemacht.

Da das Aceton bei hohen Temperaturen ganz eigenthümliche Polymerisationserscheinungen aufweist, so ändert sich seine kritische Temperatur etwas bei längerem Erwärmen. Deshalb ist bei den folgenden Versuchen auch die Beobachtungszeit angegeben. Eine ähnliche Zunahme der kritischen Temperatur hat Nadeschdin<sup>1)</sup> beim Ameisensäureamylester, Essigsäureisobutylester, Buttersäuremethylester und Valeriansäuremethylester wahrgenommen.

	Zeit	Kritische Temp. des Acetons	
8. Juli	5 <sup>h</sup> 17 $\frac{1}{2}$ <sup>m</sup>	234,0°	} Mittlerer Werth: 234,4° C.
	— 36	232,5	
	3 25	234,7	
10. Juli	— 44 $\frac{1}{2}$	232,5	
	4 18 $\frac{1}{2}$	234,9	
	— 47 $\frac{1}{2}$	236,0	
	5 15	236,0	
	3 41 $\frac{1}{4}$	236,2	
11. Juli	4 2	236,6	

Nach dem Unterbrechen des Erwärmens nimmt hier-nach die kritische Temperatur des Acetons nicht ihren ursprünglichen Werth wieder an, sondern behält den zuletzt erlangten bei; die erste Bestimmung vom 11. Juli stimmt mit der letzten vom 10. Juli überein.

Da die Beobachtungen bei Gemischen von Aceton und Aether gewöhnlich ungefähr zwei Stunden dauerten, habe ich aus den ersten sieben Bestimmungen den Mittelwerth berechnet und mit diesem die mitgetheilten Rechnungen durchgeführt. Es ergab sich also für die kritische Temperatur des Acetons: 234,4° C.

## Bestimmung der kritischen Temperatur von Gemischen von Aceton und Aethyläther.

Bei den drei untersuchten Mischungen ergaben sich folgende Resultate:

Mischung I. Procentische Zusammensetzung: Aceton 69,3, Aethyläther 30,7 Gewichtstheile.

1) Nadeschdin, Exner's Rep. 23. p. 639. 1887.

Kritische Temperatur  $t_k$ : 218,3 218,2 218,6 219,1 219,1  
 Mittlerer Werth von  $t_k$ : 218,7° C.

Mischung II: Aceton 93,4 Proc.; Aethyläther 6,6 Proc.

$t_k$  229,3 230,1 229,8 229,5 230,7 230,9  
 Mittlerer Werth von  $t_k$ : 230,1° C.

Mischung III: Aceton 85,9 Proc.; Aethyläther 14,1 Proc.

$t_k$  226,3 227,3 227,5 227,9 227,5  
 Mittlerer Werth von  $t_k$ : 227,3° C.

Wir sehen, dass auch bei diesen Gemischen  $t_k$  fast mit jeder Beobachtung wächst. Diese Zunahme ist wahrscheinlich bedingt durch die Polymerisation des Acetons im Gemisch.

Aus obigen Zahlen folgt, dass die kritische Temperatur des reinen Acetons bei Anwesenheit eines anderen Gases (denn bei so hoher Temperatur<sup>1)</sup> ist der Aether jedenfalls als Gas zu betrachten) um eine ganze beträchtliche Grösse erniedrigt werden kann. Uebrigens geht die Sache ganz genau so vor sich, als ob man es mit einer homogenen, einfachen Flüssigkeit zu thun hätte.<sup>2)</sup> Wenn es nur auf das Aceton ankäme, so wäre z. B. in Mischung III zu wenig Aceton gewesen, um das Verschwinden des Meniscus herbeizuführen; in Wirklichkeit konnte dies Verschwinden ganz gut beobachtet werden, ganz als ob die Mischung eine einfache Flüssigkeit gewesen wäre. In folgender Zusammenstellung der Resultate dieser Beobachtungen enthält die letzte Columne den angenäherten Werth des Druckes des Aethers im Rohre bei der Temperatur des Wiedererscheinens des Meniscus. Dieser Druck wurde nach den Boyle-Mariotte- und Gay-Lussac'schen Gesetzen bestimmt aus der bekannten Menge des Aethers und seinem Volumen. Diese letzteren Grössen wurden nach Beendigung der Beobachtungen durch Auswägung bestimmt.

1) 27–38 Grad über der kritischen Temperatur.

2) Vgl. van der Waals, Continuität d. gasförm. u. flüssigen Zustandes, p. 142. Leipzig 1881.

Procentgehalt		Kritische Temperatur		Druck des Aethers
Aethyläther	Aceton	Beobachtet	Berechnet n. Pawlewski	
0	100	234,4 <sup>o</sup>	—	0 Atm.
6,6	93,4	230,1	231,6 <sup>o</sup>	10,4
14,1	85,9	227,3	228,4	19,8
30,7	69,3	218,7	221,3	46,8
100,0	0	191,8	—	ca. 40

Die beobachteten Werthe der kritischen Temperatur sind also stets kleiner als die nach Pawlewski berechneten, wenn auch der Unterschied nicht bedeutend ist, nämlich im Maximum 2,6<sup>o</sup>.

Bestimmung der kritischen Temperatur des Schwefelkohlenstoffs.

Es ergaben sich für die kritische Temperatur des Schwefelkohlenstoffs folgende Werthe:

$t_k$  279,7 279,5 279,5 279,8 Mittlerer Werth: 279,6<sup>o</sup> C.

Nach der Bestimmung der kritischen Temperatur des reinen Schwefelkohlenstoffs stellte ich auf ganz dieselbe Weise wie bei Aether eine Mischung von Schwefelkohlenstoff und Luft her und untersuchte die Aenderung der kritischen Temperatur durch Anwesenheit von Luft. Es ergab sich so:

$t_k$  278,1 278,3 277,4 278,5 Mittlerer Werth von  $t_k$  = 278,1<sup>o</sup> C.

Die kritische Temperatur des Schwefelkohlenstoffs wird danach durch diesen Zusatz von Luft um 1,5<sup>o</sup> C. erniedrigt.

Der Druck der Luft bei der beobachteten kritischen Temperatur war ungefähr = 1,1 Atm.

Bestimmung der kritischen Temperatur von Mischungen von Schwefelkohlenstoff und Aether.

Mischung IV: 71,4 Proc. Schwefelkohlenstoff; 28,6 Proc. Aethyläther.

$t_k$  241,4 240,6 240,5 241,2 240,8 Mittl. Werth von  $t_k$ : 240,9<sup>o</sup> C.

Mischung V: 97,4 Proc. Schwefelkohlenstoff; 2,6 Proc. Aethyläther.

$t_k$  275,3 274,9 275,1 275,2 Mittlerer Werth von  $t_k$ : 275,1<sup>o</sup> C.

Mischung VI: 88,1 Proc. Schwefelkohlenstoff; 11,9 Proc. Aethyläther.

$t_k$  262,4 262,3 262,3 262,3 262,3 Mittl. Werth von  $t_k$ : 262,3<sup>o</sup> C.

In folgender Tabelle sind die Resultate dieser Experimente zusammengestellt. Die letzte Columnne enthält wieder den angenäherten Werth des Druckes des Aethers bei der beobachteten kritischen Temperatur.

Procentgehalt		Kritische Temperatur		Druck des Aethers
Aethyläther	Schwefel- kohlenstoff	Beobachtet	Nach Paw- lewski ber.	
0	100	279,6° C.	—	0 Atm.
2,6	97,4	275,1	277,3°	6,9
11,9	88,1	262,3	269,2	29,9
28,6	71,4	240,9	254,5	49,7
100	0	191,8	—	ca. 40

Wir erkennen hieraus, dass die beobachteten Werthe von  $t_k$  zuweilen ganz erheblich kleiner sind, als es die Pawlewski'sche Formel verlangt; bei Aceton und Aethyläther waren die Abweichungen viel geringer. Vielleicht sind allerdings hier die beobachteten Werthe etwas zu klein, da sich

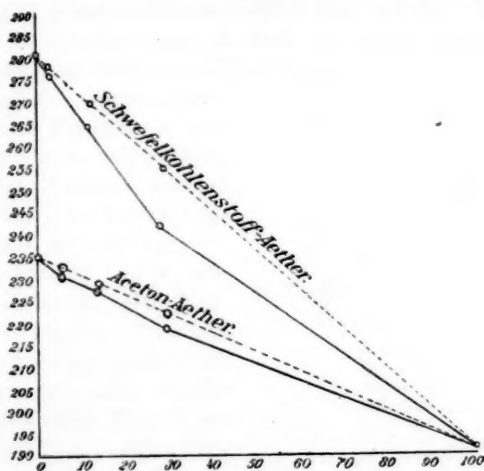


Fig. 5.

während des Erwärmens etwas Schwefelwasserstoff im Röhrchen gebildet zu haben scheint<sup>1)</sup>, doch muss die Differenz

1) Vgl. Dewar, Proc. Roy. Soc. 30. p. 538. 1880; auch Beibl. 4. p. 771. 1880.

zwischen den beobachteten und den berechneten Grössen auf jeden Fall beträchtlich sein.

Den Verlauf der Zahlen kann man am besten aus Fig. 5 übersehen; hier stellen die Abscissen den Procentgehalt an Aether, die Ordinaten die kritischen Temperaturen dar. Die beiden oberen Linien beziehen sich auf die Mischungen von Schwefelkohlenstoff mit Aether, die beiden unteren auf Acetonäther. Die punktirten Linien entsprechen dem Pawlewski'schen Gesetze, die ausgezogenen den beobachteten Werthen der kritischen Temperatur. Die Pawlewski'sche Formel liefert also zu grosse Werthe für diese kritische Temperatur, was, wie wir gesehen haben, sich auch aus den Beobachtungen Ansdell's ergab.

(Fortsetzung im nächsten Heft.)

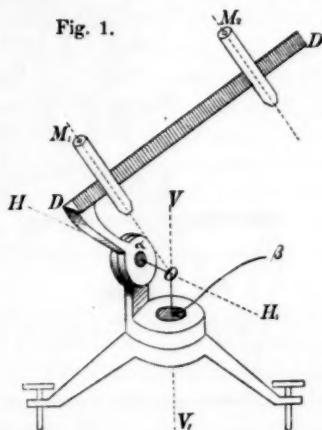
# XVI. Ein Comparator für physikalische Zwecke; von Ferdinand Braun.

Die gebräuchlichen Comparatoren setzen voraus, dass die zu messende Länge horizontal sei, und sind schwer verwendbar, um direct in einer Versuchsanordnung Abmessungen vorzunehmen. Nun ist dies für den Physiker öfters wünschenswerth, ebenso wie mir wiederholt das Bedürfniss entgegentrat, den Abstand zweier Punkte bestimmen zu können, deren Verbindungslinie schräg gelegen ist. Der folgende Apparat, den ich in Gemeinschaft mit dem hiesigen Universitätsmechaniker, Hrn. Albrecht, construiert habe, gestattet dies bis zu Längen von 400 mm; er kann gleichzeitig als gewöhnlicher Comparator und als Kathetometer benutzt werden. Die gewünschte Genauigkeit war 0,01 mm. Für Messungen in schräger Lage ist damit die Grenze wegen der aus Durchbiegung entstehenden Fehler gegeben. Für verticale und horizontale Abmessungen sind noch Bruchtheile von diesem Werthe zu erreichen.

Der Apparat besteht (Fig. 1 und 2) aus einem Dreikant  $DD$ , auf welchem zwei Mikroskope  $M_1$  und  $M_2$  sich schieben lassen. Der Dreikant ist drehbar 1) in seinen Lagern um sich selber, d. h. um eine Linie, welche dem Maassstab (Fig. 2) parallel ist; 2) mit seinen Trägern um die verticale Axe  $VV_1$ ; 3) mit einem Arme um die horizontale Axe  $HH_1$ .

Der Maassstab wird von einem Schlitten getragen, welcher an einem in das Axenlager  $\alpha$  eingeschliffenen Conus befestigt ist. Soll der Abstand  $A_1 A_2$  zweier beliebig im Raume

Fig. 1.



gelegenen Punkte bestimmt werden, so wird der Maassstab  $ss$  mit sammt dem ihn tragenden Conus aus der Hülse  $a$  herausgezogen und das Mikroskop  $M_1$  auf den Durchschnits-

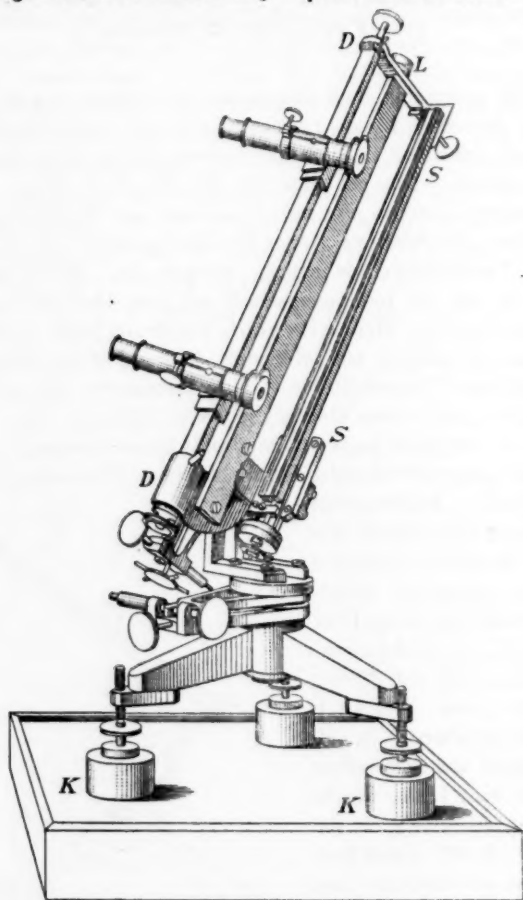


Fig. 2.

punkt  $O$  der horizontalen ( $HH_1$ ) und der verticalen Axe ( $VV_1$ ) eingestellt. Dies geschieht leicht, indem ein genau abgepasster, oben spitzer Stift in die Oeffnung  $\beta$  gesetzt wird.



Seine Spitze endet in  $O$  und man hat nur auf diese einzustellen. Man entfernt nun den Stift wieder und bringt den ersten der zu beobachtenden Punkte  $A_1$  an die Stelle  $O$ . Diese Operation, auf die nachher noch mit einigen Worten eingegangen werden soll, ist die umständlichste. Sie sei wenigstens nahezu gelungen, so kann man nun den Dreikant beliebig um die Axen  $HH_1$  und  $VV_1$  drehen, ohne den Punkt  $A_1$  aus dem Mikroskop  $M_1$  zu verlieren. Man sucht den zweiten Punkt auf; Drehungen um die horizontale und verticale Axe können zu dem Ende grob und fein ausgeführt werden. Ist auch der zweite Punkt scharf eingestellt, die Einstellung des ersten nochmals controlirt, so wird der Maassstab wieder an seine Stelle gelegt und direct auf diesem die Länge  $A_1A_2$  gemessen.

Um diese Operation möglichst bequem zu machen, ist es so eingerichtet, dass mau den in ganze Millimeter getheilten Stab durch eine Mikrometerschraube von 1 mm Ganghöhe sich selber parallel verschieben kann. Die Trommel der Schraube lässt sich für sich drehen, ohne dass sich die Schraube mitdreht. Man schiebt nun den Stab, bis das Mikroskop  $M_1$  auf einen ganzen Theilstrich zeigt, dreht dann die Trommel, bis ihr Nullpunkt mit dem Indexstrich zusammenfällt, sieht durch das zweite Mikroskop und schiebt den Maassstab so lange, bis der nächste Theilstrich desselben zur Coincidenz mit dem Fadenkreuz kommt. Dadurch sind die leicht zu Irthümern Veranlassung gebenden zweifachen Ablesungen vermieden. — Die Schraube lässt sich controliren, indem man der Reihe nach mit ihren verschiedenen Gängen dasselbe Strichintervall vorschiebt; umgekehrt auch der Maassstab.

Um die Mikroskope bequem einstellen zu können, sind dieselben folgendermaassen eingerichtet: Das Objectiv ist, wie bei den Mikroskopen mit Revolverobjectiven, drehbar; man kann an Stelle der Linse eine Oeffnung bringen. Hat man so das Objectiv und durch Herausziehen das Ocular entfernt, (das Fadenkreuz ist, um Beschädigungen vorzubeugen, durch ein Planglas geschützt), so gibt die Oeffnung mit den Diaphragmen des Rohres zusammen eine ausreichend genaue Visirlinie für die angenäherte Einstellung.

Den ersten Virirpunkt  $A_1$  an die Stelle  $O$  zu bringen, wird ermöglicht 1) durch einfaches Schieben, eventuell mit sanftem Klopfen der metallischen Unterlegklötze  $K$  auf einem gut geglätteten Brette; für horizontales Verstellen hat sich diese Art am besten bewährt; 2) durch die zu dem Ende ziemlich steilen und langen Stellschrauben des Apparates; 3) und dies erwies sich für einen bequemen Gebrauch als nothwendig, indem man den ganzen Apparat auf einen mit Schraube oder Zahnstange leicht hebbaren Tisch stellte.

Horizontale und verticale Längen sind bequemer zu messen. Man dreht den Dreikant um seine eigene Axe, stellt die Mikroskope ein und dreht ihn dann auf den Maassstab zur Ablesung zurück. Diese Stellung wird durch einen Anschlag angegeben. Zur bequemen Verticalstellung befindet sich am oberen Ende eine Dosenlibelle  $L$ . Dieselbe spielt ein, wenn die Mikroskope auf einen vertical herabhängenden Cocon deutlich eingestellt sind.

Der Apparat hat sich bei einer im hiesigen Institut ausgeführten Untersuchung<sup>1)</sup> und nach einigen bei dieser Gelegenheit angebrachten Aenderungen gut bewährt.

Phys. Inst. der Univ. Tübingen.

---

1) Vgl. die folgende Abhandlung von W. Negbaur p. 637.

**XVII. Ueber eine Methode zur Bestimmung von Drehungsmomenten, welche um eine verticale Axe wirken; von W. Negbaur.**

Drehungsmomente, welche um eine horizontale Axe wirken, können mittelst der Wage bestimmt werden. Findet die Drehung um eine verticale Linie statt, wie dies bei physikalischen Messungen häufig vorkommt, so hat man zwei gebräuchliche Methoden:

Entweder ermittelt man die Schwingungsdauer eines Körpers von bekanntem Trägheitsmoment (Coulomb's Methode der Oscillationen), oder man wendet die bifilare Methode an. Die Schwierigkeiten der ersteren sind bekannt und verschiedentlich besprochen worden.<sup>1)</sup> Die bifilare Methode führt namentlich für kleine Drehungsmomente auch auf Schwierigkeiten, wobei besonders die unsicheren Bestimmungen der Fadenabstände eine wesentliche Rolle spielen.

Auf Veranlassung des Hrn. Prof. Braun habe ich die folgende Methode versucht, welche auch kleine Drehungsmomente in absolutem Maasse, und, wie der Erfolg zeigt, nahezu bis auf 0,1 Proc. genau zu ermitteln gestattet. Sie wurde versuchsweise zur Bestimmung von Torsionsmoduln verwendet.

**Versuchsanordnung.**

Das eine Ende eines Drahtes von ca. 50 cm Länge und 1 mm Durchmesser ist sorgfältig in einen Messinghalter eingelöthet. Der Draht hängt vertical herab und trägt an seinem unteren freien Ende einen Messingstab, in den er ebenfalls verlöthet ist. Auf die Mitte des Stabes ist rechtwinklig zu diesem eine Scheibe aufgeschraubt. (s. Figur.) Ueber dieser sitzt ein kleiner Spiegel an einem beweglichen Halter, unter derselben ist eine Vorrichtung angebracht, um bequeme Belastungsstücke auswechseln zu können. Die Torsion wird

<sup>1)</sup> F. Kohlrausch, Wied. Ann. 17. p. 1738. 1882; ferner M. Baummeister, Wied. Ann. 18. p. 578. 1883.



b) An der horizontalen Drehaxe des Comparators ist ein Spiegel angebracht, der mit Fernrohr und Scala beobachtet wird. Die Microscope werden auf den Cocon *BA* eingestellt, die Stellung des Dreikants in dem zweiten Fernrohr abgelesen, der Comparator gedreht, bis der Dreikant vertical steht und die neue Stellung notirt. Die Verticalstellung des Dreikants wird mit einer am Apparat befindlichen Dosenlibelle von grosser Empfindlichkeit controlirt.

#### Gleichgewicht des Systems.

Wir vernachlässigen die geringe Arbeit, die bei einer virtuellen Bewegung des Systems durch Hebung des Schwerpunktes von *P* geleistet wird <sup>1)</sup> und nehmen an, der Draht drehe sich bei einer virtuellen Verschiebung um seine geometrische Axe. Lässt man *A* einen kleinen Kreisbogen um *B* als Mittelpunkt beschreiben, so werden die Schwerpunkte der Cocons sich um die Hälfte der Verticalbewegung von *A* in ihrer Lage verändern. Dies würde streng der Fall sein, wenn die Fäden gerade wären, mit ausreichender Annäherung aber auch noch, wenn sie, wie thatsächlich, Stücke einer Kettenlinie darstellen.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ergibt als Gleichgewichtsbedingung:

$$Q \sin B - \frac{T}{\varrho} \cos B + \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot \sin B = 0 \text{ oder:}$$

$$\frac{T}{\varrho} = \left( Q + \frac{q_1 + q_2}{2} \right) \operatorname{tg} B,$$

wo *T* die Torsionskraft des Drahtes,  $\varrho$  den Radius der Messingscheibe,  $q_1$  und  $q_2$  die Gewichte der Coconfäden *AF* und *AB* bedeuten.

Auch aus den Gleichgewichtsbedingungen für den Punkt *A* und den Bedingungen, welche die Kettenlinie vorschreibt, lässt sich dieselbe Gleichung ableiten.

#### Kurze Beschreibung eines Versuchs.

Während des Versuchs war zu beachten, dass

1) der Draht während der Torsion seine Verticalstellung nicht verliess; d. h. die Längsaxe der Scala durfte sich nicht

1) *P* war im vorliegenden Falle meist über 5000mal grösser als *Q*.

gegen den horizontalen Faden des Fadenkreuzes im Fernrohr verschieben,

2) mussten beide Enden des Cocons  $AF$  in derselben Horizontalebene verlaufen. Mit dem Kathetometer wurde dies controlirt.

Nachdem das Gewicht  $Q$  und die Stellung des drehbaren Armes am Stativ, mit welchem der Winkel  $B$  regulirt wurde, den Dimensionen des Drahtes angepasst waren, wurde die Nulllage notirt und der Draht tordirt. Mit der Hand wurden die Schwingungen desselben gedämpft. Nach wenigen Minuten waren die Winkel constant und konnten abgelesen werden. Zum Schlusse wurde die Nulllage verglichen. Die Bestimmung der Länge des Cocons  $AB$  war wegen des Knotens bei  $A$  und des Schnittpunktes in  $B$  nicht ohne Schwierigkeit. Wird der Winkel  $B$  nicht aus den zwei Längen  $b$  und  $c$ , sondern aus dem Winkel bestimmt, den der Arm des Comparators durchläuft, wenn er von der Einstellung auf den Cocon  $AB$  zur Verticalstellung gedreht wird, so fällt diese Schwierigkeit weg, da man alsdann nur auf die Mittellinie des Cocons einzustellen braucht.

#### Genauigkeit der Methode.

Um zu sehen, ob es möglich ist den Torsionsmodul auf  $\frac{1}{1000}$  seines Werthes genau zu bestimmen, musste zuerst die Empfindlichkeit der einzelnen Beobachtungsarten verglichen werden. Mit Fernrohr und Scala ist die Genauigkeit bei der Bestimmung des Torsionswinkels leicht zu erreichen, da man Zehntelmillimeter noch gut schätzen kann. Die Empfindlichkeit der Messung des Winkels  $B$  mit dem Comparator musste erst einer Prüfung unterzogen werden. Zu diesem Zweck wurde zuerst untersucht, mit welcher Sicherheit man einen Theilstrich des Silbermaassstabs des Comparators einstellt. Es ergab sich folgende Reihe in Hundertstel Millimetern:

0,6 0,3 0,2 1,0 0,2 0,6 0,7 0,8 1,0.

Auf  $\frac{1}{100}$  mm ist der Theilstrich somit sicher einzustellen. Verfährt man aber so, dass bei allen Einstellungen die Drehungsrichtung der Trommel dieselbe ist, so gelangt man zu viel grösserer Uebereinstimmung der Werthe:

0,0	0,0	0,2	0,5	0,1	-0,05
0,0	0,1	0,25	0,15	0,2	0,1

Der Werth liegt also innerhalb eines Gebietes von 0,003 mm. Die Messung einer Länge ergab die Werthe in Millimetern:

291,832; 291,830; 291,827;

eine Genauigkeit der Länge auf  $\frac{1}{70000}$  ihres Werthes. Bei der Einstellung auf die Coconfäden konnte diese Genauigkeit nicht erreicht werden. Durch die Schwierigkeit, auf den Coconknoten sowie auf die Mittellinie des Cocons einzustellen, ausserdem durch geringe Luftschwankungen, wurde der Werth des Winkels so beeinflusst, dass die Genauigkeit  $\frac{1}{100}$  mm kaum überschreitet. Die Durchmesser der Drähte wurden sorgfältig gemessen. Auch hier konnte die dritte Stelle als zuverlässig angesehen werden.

Die Proportionalität der Torsionswinkel mit den tordirenden Kräften ist das Maass für die Genauigkeit der Methode. Bei den Versuchen 1—5 war das Gewicht  $Q$  das nämliche. Der Winkel  $B$  kann also direct mit dem auf Winkelmaass reducirten Scalenausschlag verglichen werden.

Bedeutet:  $A$  den reducirten Scalenausschlag,

$c$  die Hypotenuse des Dreiecks  $ABC$ ,

$b$  die eine Kathete,

$B$  den von  $a$  und  $c$  eingeschlossenen Winkel,

so ist  $\operatorname{tg} B = b/\sqrt{c^2 - b^2}$ .

Nr.d.Vers.	1.	2.	3.	4.	5.
$b$	216,567	148,000	173,682	181,181	166,356
$c$	303,380	291,278	273,609	288,158	287,354
$\operatorname{tg} B$	1,019 367	0,589 928	0,821 514	0,808 596	0,71821
$A$	222,41	128,86	179,30	176,67	156,88

Es müsste sich also verhalten, wenn die Indices die Versuchsnummern andeuten:

$$A_1 : \operatorname{tg} B_1 = A_2 : \operatorname{tg} B_2 \text{ u. s. w.}$$

Bis zu welchem Grade die Proportion erfüllt ist, zeigt die folgende Tabelle, in welcher die Producte  $A_1 \cdot \operatorname{tg} B_2$  und  $A_2 \cdot \operatorname{tg} B$  u. s. w. zusammengestellt sind.

131,355	182,77	180,116	159,914	105,86
131,206	182,71	179,836	159,734	105,774
0,11%	0,03%	0,16%	0,12%	0,08%
104,223	92,549	145,136	128,877	126,888
104,195	92,546	144,98	128,775	126,849
0,028%	0,003%	0,10%	0,07%	0,026%



Die mittlere Differenz ist 0,08 Proc. Es ist also in der That mit dieser Methode die Genauigkeit von 0,1 Proc. erreicht.

Es lag sehr nahe, nach dieser günstigen Methode einige Bestimmungen von Torsionsmoduln auszuführen. Obwohl die nachfolgenden Angaben, streng genommen, nicht in das Thema der Abhandlung gehören, so glaubte ich doch die Resultate einiger Beobachtungen anführen zu dürfen, weil einerseits die Uebereinstimmung der Werthe für die Torsionsmoduln die Genauigkeit der Methode bestätigt, andererseits mir die Resultate nebst einigen Folgerungen nicht ohne allgemeines Interesse zu sein schienen.

#### Vorbedingungen.

Bei der grossen Abhängigkeit des Torsionsmoduls von der Structur des Drahtes war es wünschenswerth, die zu untersuchenden Drähte in der gleichen Weise vorzubereiten, um die Moduln dieser Metalle annäherd vergleichen zu können. Ich habe den weichen Drähten den Vorzug gegeben, da mir aus der Literatur hervorzugehen schien, dass diese sich gleichmässiger herstellen lassen. Die Drähte wurden unter geringer Belastung mit electricischem Strom zu schwacher Rothgluht erhitzt und, nachdem sie von einer etwaigen Oxydschicht befreit waren, für die Dauer von mindestens acht Tagen belastet aufgehängt. Zeigten sie nach Ablauf dieser Zeit keine Verlängerung mehr, und erwies sich der Durchmesser im ganzen Verlaufe des Drahtes als der gleiche, so wurden sie zu Versuchen verwendet. In 2,4 m Entfernung von dem Versuchsdraht befand sich das Fernrohr. Dasselbe wurde mittelst Kathetometers mit der Spiegelmitte in eine Horizontale gebracht und der Spiegel so lange gedreht, bis das Bild der Scala im Gesichtsfeld erschien. Alsdann stand die Visirlinie senkrecht auf der Längsaxe des Drahtes und eine Correction wegen Spiegelneigung war unnöthig. Nun wurde der Draht so stark abwechselnd nach beiden Seiten tordirt, dass die Scala gerade noch im Gesichtsfeld zu sehen war. Zeigte sich die Nulllage constant, so lag die Elasticitätsgrenze ausserhalb des Bereichs der beobachteten Tor-

sion. Bei allen Drähten war diese Bedingung erfüllt. Es handelte sich im Mittel um Winkel von  $1,6^\circ$ .

#### Berechnung und Correctionen.

Bedeutet:  $L$  die Länge des Untersuchungsdrahtes,

$R$  den Halbmesser desselben,

$H$  den Halbmesser der Messingscheibe,

$q_m$  den auf Bogenwerth in Millimetern bei dem Halbmesser 1 reducirten Torsionswinkel  $q_0$ ,

und haben  $Q$  und  $B$  noch ihre frühere Bedeutung, so besteht die Relation, der Torsionsmodul:

$$T = \frac{2L}{\pi R^4} \cdot \frac{H Q \operatorname{tg} B}{q_m} \frac{[\text{kg-Gew.}]}{[\text{qmm}]}.$$

Correctionen: 1)  $L$  wird wegen der durch Belastung eingetretenen Verlängerung auf  $L_0 = L - \lambda$  reducirt.  $\lambda = LM/E.Q_s$ . Hier bedeutet  $M$  die Belastung in Kilogrammen,  $E$  den Elasticitätsmodul und  $Q_s$  den Querschnitt des Drahtes.

2)  $R - \varrho = R_0$ ;  $\varrho = (\mu R \lambda / L)$ . Das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation  $\mu$  wurde zu 0,3 angenommen. Die Correction konnte meist vernachlässigt werden.

3)  $Q$  wurde um das halbe Gewicht der Coconfäden  $AF$  und  $AB$  zu  $Q_0$  vermehrt.

4)  $q_0$  ergibt sich aus der Formel  $28,648^\circ \cdot A_0 / S_0$ , wo  $A_0$  den reducirten Ausschlag und  $S_0$  den corrigirten Scalenabstand bedeutet.

Bezeichnet man zur Abkürzung den nur von den Dimensionen des Drahtes und dem Gewicht  $P$  abhängigen Reductionsfactor  $2L/\pi R^4$  mit  $C$ , die Torsionskraft  $QH \operatorname{tg} B$  mit  $K$ , so wird  $T = C \cdot K / q_m$ .

#### Resultate.

In der folgenden Tabelle sind die erhaltenen Werthe zusammengestellt. Man erhält die Torsionsmoduln in absolutem Masse, wenn man die Werthe der letzten Columnne mit  $981 \cdot 10^5$  multiplicirt.

<i>C</i>	<i>Q</i> <sub>0</sub> (g)	tg <i>B</i>	<i>q</i> <sub>0</sub>	<i>K</i>	<i>T</i>
1a) Ausgeglühter Stahldraht.					
8710,0	1,9712	1,019 367	2,5827°	43,658	8433,0
"	"	0,589 928	1,4964	25,262	8423,0
"	"	0,821 514	2,0821	35,178	8431,4
"	"	0,808 596	2,05155	34,6247	8421,0
"	"	0,718 210	1,82171	30,7547	8425,4
1b) Ausgeglühter Stahldraht.					
8759,6	"	0,702 090	1,806 88°	30,0646	8352,5
8763,0	"	0,699 691	1,801 54	29,9617	8350,9
8759,6	"	0,704 987	1,812 7	30,1887	8360,2
2) Reiner weicher Nickeldraht.					
4846,78	3,7591	0,776 475	2,215 5°	63,4068	7947,3
"	"	0,866 275	1,045 57	29,91004	7929,6
"	"	0,776 328	2,214 32	63,8953	7949,7
3) Reines weiches Nickel.					
5418,25	"	0,614 590	4,021 2°	50,1870	8374,7
"	"	0,585 725	3,509 54	43,7470	8373,1
4) Reiner weicher Nickeldraht.					
1892,1	"	0,534 38	0,582 95°	43,6382	8110,6
"	"	0,644 181	0,703 1	52,6034	8105,2
"	6,7591	0,207 70	0,411 80	30,4964	8025,2
"	11,7591	0,179 69	0,618 775	45,9030	8042,0

Die Messungen sind bei einer Temperatur von 18—20° C. ausgeführt worden. Von einer Correction auf die Temperatur 0° ist Abstand genommen. Als Mittel aus den Beobachtungen ergibt sich der Torsionsmodul des Nickels rund zu 8000 kg/qmm, derjenige des Nickelins kaum halb so gross zu 3900 kg/qmm.

In der Literatur fand ich keine Angaben über den Torsionsmodul von Nickel oder Nickelins, sodass ein Vergleich mit den Resultaten anderer Beobachter nicht möglich ist.

Berechnung von  $\mu$  für Nickel. Um  $\mu$ , die Verhältnisszahl der Quercontraction zur Längendilatation zu berechnen, wurden einige Bestimmungen des Elasticitätsmoduls an einem reinen Nickeldraht in der bekannten Weise nach Wertheim ausgeführt. So ergab sich an einem 3,2 m langen Draht von 0,661 mm Durchmesser eine Verlängerung von 0,927 mm bei einer Zusatzbelastung von 2003,4 g, woraus sich der Modul zu 20153,24 kg/qmm berechnet. In der Literatur fand sich nur eine Bestimmung des Moduls in

einer Abhandlung von Cantone.<sup>1)</sup> Dasselbst wird der Modul an einem dicken Nickelstab durch Druck zu 22480 kg/qmm bestimmt. Aus dem Torsions- und Elasticitätsmodul kann  $u$  nach der Formel  $T = \frac{1}{2} E / (1 + \mu)$  berechnet werden. Mit Benutzung des von mir bestimmten Elasticitätsmoduls wird  $\mu = 0,255$ . Mit dem Werth des Moduls nach Cantone wird  $\mu = 0,40$ . Für das Mittel aus den beiden Elasticitätsmoduln ergibt sich  $\mu = 0,328$ .

Abhängigkeit des Torsionsmoduls von der Belastung. Aus der sehr ausgedehnten Literatur über diesen Gegenstand sei es gestattet, einige Urtheile anzuführen.

1) Coulomb weist die Unabhängigkeit des Moduls von der Belastung nach.

2) F. Braun.<sup>2)</sup> Das Torsionsmoment wird an einer 0,67 mm dicken Stahlsaite bei Hinzufügen eines Zuges von 8,55 kg/qmm durch dynamische Versuche im Verhältniss von 1,0474 bis 1,0479:1 durch statische Versuche im Verhältniss von 1,029 bis 1,036:1 verringert.

3) E. Warburg.<sup>3)</sup> Eine Abhängigkeit des Torsionscoëfficienten von der Spannung ergibt sich innerhalb der Versuchsgrenzen nicht.

4) M. Baumeister. Die Spannung scheint nach den Ergebnissen der feinsten Eisen- und Messingdrähte nicht ganz ohne Einfluss zu sein.

Ich habe an dem Stahldraht bei den Versuchen unter 1<sub>b</sub>) den Einfluss der Belastung geprüft. Der Draht war mit dem bedeutend vermehrten Gewicht längere Zeit sich selbst überlassen, bis keine Verlängerung mehr wahrzunehmen war. Unter 1<sub>b</sub>) ist die erste Beobachtung mit vermehrtem Gewicht, die zweite mit der Anfangsbelastung, die dritte wieder mit vermehrtem Gewicht vorgenommen. Bei Berücksichtigung der veränderten Länge des Drahtes zeigen schliesslich die Werthe der Moduln eine grosse Uebereinstimmung

1) Cantone, Beibl. 14. p. 16. 1889.

2) F. Braun, Pogg. Ann. 159. p. 352. 1876.

3) E. Warburg, Berichte d. naturw. Ges. zu Freiburg im Breisgau. 7. 1880.

und liegt die kleine Differenz ausserhalb der Genauigkeit der Methode. Ein weiterer Versuch wurde in folgender Weise angestellt. Das Zusatzgewicht war durch einen feinen Seidenfaden mit dem Hauptgewicht verbunden. Nachdem der Draht einer permanenten Torsion unterworfen, die Winkel abgelesen waren, wurde der Seidenfaden abgebrannt. Der Ausschlag im Fernrohr ging um einige Zehntel Millimeter zurück. Die Nulllage war dieselbe, wie vor dem Versuch. Die eingetretene Verkürzung des Drahtes kann wie vorher die Ursache der Verschiebung sein; jedenfalls konnte mittelst dieser Methode ein Einfluss der Belastung nicht constatirt werden.

Phys. Inst. der Univ. Tübingen, Juli 1890.

(Au

188  
Wa  
in c  
die  
star  
das  
den  
wie  
neh  
tret  
ursi

die  
Luf  
allen  
We  
para  
vert  
aber  
Her  
Glie  
wick  
aus  
Reil

An